Zadanie 1. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -i \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & 1 \\ -i & i+1 & -1 \\ 2 & 2-i & i \end{bmatrix}$$

Oblicz:

a) $B^2 - A^TCA$, b) $A^TC^2 + BA^T$, c) $DC - ABA^T$, d) $D^2A + 2(A^TC)^T$.

Zadanie 2. Wiedząc, że $\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = -3$ oblicz wartość wyznacznika $\begin{vmatrix} \frac{1}{3}b - a & \frac{1}{3}y - x & \frac{1}{3}q - p \\ a + 2c & x + 2z & p + 2r \\ -c & -z & -r \end{vmatrix}$.

Zadanie 3. Wyznacz macierze dopełnień algebraicznych dla poniższych macierzy, a następnie oblicz ich wyznaczniki korzystając z twierdzenia Laplace'a:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4. Oblicz wyznacznik n-tego stopnia:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ -1 & -2 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & \dots & 1-n & 0 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}$

Zadanie 5. Dany jest wyznacznik stopnia $n+1$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Wykaż, że $D_n = xD_{n-1} + a_n$. Następnie wyznacz wzór na D_n oraz udowodnić jego poprawność korzystając z zasady indukcji matematycznej.

Zadanie 6. Wykaż, że:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 & \dots & x+n-1 & x+n \\ x+1 & x+1 & x+2 & \dots & x+n-1 & x+n \\ x+2 & x+2 & x+2 & \dots & x+n-1 & x+n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x+n-1 & x+n-1 & x+n-1 & \dots & x+n-1 & x+n \\ x+n & x+n & x+n & \dots & x+n & x+n \end{vmatrix} = (-1)^n(x+n).$$