1) Do operacji elementarnych na wierszach (kolumnach) macierzy zaliczamy:
   a) Zamiana miejscami wierszy (kolumn) macierzy
   b) Dodanie do wiersza (kolumny) kombinacji liniowej pozostałych wierszy (kolumn)
   c) Pomnożenie wiersza (kolumny) przez niezerowy skalar.

2) $\forall A, B \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \quad \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

3) Mówimy, że macierz $A \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ ma **postać schodkową** jeśli wszystkie jej niezerowe wiersze występują kolejno jeden po drugim począwszy od pierwszego wiersza oraz w każdym takim wierszu pierwszy niezerowy element (tzw. schodek) znajduje się w kolumnie o indeksie większym niż indeks kolumny, w którym znajduje się pierwszy niezerowy element wiersza poprzedniego.

4) Rzędem $r(A)$ macierzy $A \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ nazywamy:
   a) maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych wierszy lub kolumn traktowanych jako wektory z $\mathbb{K}^n$
   b) ilość schodków w macierzy schodkowej otrzymanej z macierzy A przez zastosowanie operacji elementarnych na wierszach lub kolumnach macierzy A (te operacje nie zmieniają rzędu macierzy!)
   c) największy ze stopni minorów niezerowych w macierzy A.

5) Niech $A \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Jeśli istnieje macierz $B \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ taka, że $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, to nazywamy ją **macierzą odwrotną** do A i oznaczamy A^{-1}. Wtedy macierz A nazywamy macierzą odwracalną.

6) Jeśli A jest odwracalna to:
   a) $\det A \neq 0$ oraz $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$
   b) $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}^T$, gdzie $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, gdzie $\overline{a_{ij}}$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} zdefiniowanym następująco: $\overline{a_{ij}} := (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$.

7) Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

8) Macierz kwadratową nazywamy **nieosobliwą** wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$, w przeciwnym wypadku mówimy, że A jest **osobliwa**.

Zadanie 1. Doprowadź poniższe macierze do postaci schodkowej i wyznacz ich rzędy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Zadanie 2. Wyznacz macierze odwrotne do zadanych macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Sprawdź czy istnieje A^{-1}. Jeśli tak, wyznacz rząd macierzy $C = A^{-1}B^T$.

Zadanie 4. Podaj możliwe wartości wyznacznika macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jeśli:

a) $A^2 = A^T$, b) $A^T - A^{-1} = \overline{0}$,

Zadanie 5. Rozwiąż równanie:

$$AX = (X^T B)^T + CD^{-1},$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$