Zadanie 1. Zbadaj własności działań w podanych zbiorach:

1. $a \star b = a + b + 1$ w zbiorze $\mathbb{Z}$,
2. $a \star b = a + b + ab$ w zbiorze $\mathbb{R}$,
3. $(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$ w zbiorze $\mathbb{R}^2$,

Zadanie 2. Sprawdź, czy podana struktura jest grupą. Jeśli tak, sprawdź, czy jest grupą abelową.

a) $(\mathbb{R}, \star)$, gdzie $a \star b = \frac{1}{2}(a + b)$,

b) $(\mathbb{R}, \star)$, gdzie $a \star b = a + b + 2$,

c) $(\mathbb{Z}, \circ)$, gdzie $a \circ b = a + b + 2$,

d) $(A, +)$, gdzie $A = \{a\sqrt{3} + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$,

e) $(A, \star)$, gdzie $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \neq 0\}$, $z_1 \star z_2 = iz_1z_2$.

Zadanie 3. Określ ilość inwersji oraz znak permutacji:

a) $\sigma_4 = (2, 4, 5, 6, 1, 3)$, b) $\sigma_5 = (3, 6, 2, 5, 4, 1)$, c) $\sigma_6 = (5, 2, 6, 1, 4, 3)$.

Rozłóż powyższe permutacje na transpozycje oraz wyznacz permutacje $\sigma_4 \circ \sigma_5^{-1}$, $\sigma_6^{-1} \circ \sigma_4$, $\sigma_5 \circ \sigma_6^{-1} \circ \sigma_5$.

Zadanie 4. Dobierz $i, j, k \in \{1, \ldots, 8\}$ tak, aby wyrażenie:

$$a_{68}a_{33}a_{21}a_{57}a_{84}a_{4j}a_{1k}a_{7i}$$

wchodziło w skład sumy określającej wyznacznik 8-ego stopnia ze znakiem minus. **Zadanie 5.** Jaką strukturę stanowi zbiór A wraz z podanymi działaniami?

a) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \odot (c, d) = (ac, bd)$,

b) $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leqslant x < 1\}$, $x \star y = \min\{x, y\}, x \circ y = \max\{x, y\}$,

c) $A = \mathbb{Q}$, $a \oplus b = a + b + 1$, $a \odot b = ab + a + b$,

d) $A = \{x \in \mathbb{Q} : \exists a \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{N}_0 : x = \frac{a}{2^k}\}$ z dodawaniem i mnożeniem.

Zadanie 6. W zbiorze $\mathbb{R}^2$ określamy następujące działania:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc).$$

Wykaż, że struktura $(\mathbb{Q}^2, \oplus, \odot)$ jest ciałem. Czy struktura $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ jest ciałem?

Zadanie 7.

a) Wykaż, że w dowolnej grupie $(G, \star)$ równość $a^2 = a$ (gdzie $a^2 = a \star a$) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy a jest elementem neutralnym grupy G.

b) Sprawdź, czy para $(A, \cdot)$ jest grupą, jeśli $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

c) Sprawdź, czy para $(B, \cdot)$ jest grupą, jeśli $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant 1\}$.

Zadanie 8. Niech $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ dla $n \in \mathbb{N}$. W zbiorze $\mathbb{Z}_n$ określamy działania $+_n$ oraz $\cdot_n$ następująco: $x +_n y$ to reszta z dzielenia liczby $x + y$ przez n, natomiast $x \cdot y$ to reszta z dzielenia liczby xy przez n. Udowodnij, że $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ jest pierścieniem.

Zadanie 9. Dla dowolnych $(z_1, w_1), (z_2, w_2) \in \mathbb{C}$ określamy działania:

$$(z_1, w_1) + (z_2, w_2) = (z_1 + z_2, w_1 + w_2),$$
$$(z_1, w_1) \star (z_2, w_2) = (z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2}, z_1 w_2 + w_1 \overline{z_1}).$$

Sprawdź. czy struktura $(\mathbb{C}^2, +, \star)$ jest ciałem. Jeśli tak, sprawdź czy jest to ciało przemienne.

Zadanie 10. W zbiorze $\mathbb{Z}$ określamy działania $\oplus$ oraz $\odot$ następująco:

$$x \oplus y = 1 + x + y \qquad\qquad x \odot y = xy + x + y.$$

Sprawdź, czy działanie $\oplus$ jest rozdzielne względem działania $\odot$ oraz czy działanie $\odot$ jest rozdzielne względem działania $\oplus$.

Zadanie 11. Niech G oznacza grupę odwzorowań $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takich, że $g(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Udowodnij, że odwzorowanie $f_a : G \ni g \to a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest homomorfizmem grupy $(G, \circ)$ w grupę $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Zadanie 12. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \{m + n\sqrt{a} : m, n \in \mathbb{Q}\}$.

a) Udowodnij, że grupy $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +)$ i $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +)$ są izomorficzne.

b) Czy istnieje izomorfizm ciała $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +, \cdot)$ na ciało $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$? Odpowiedź uzasadnij.

c) Czy istnieje izomorfizm ciała $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +, \cdot)$ na ciało $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 13.

a) Dla dowolnego pierścienia całkowitego $(P, \oplus, \odot)$ oraz elementu $a \in P$ udowodnij, że:

$$a^3 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ gdzie } a^3 = a \odot a \odot a.$$

b) Udowodnij, że dla dowolnych elementów z, w w ciele liczb zespolonych prawdziwa jest nierówność:

$$||z| - |w|| \leqslant |z + w|.$$