1) Niech $V \neq \emptyset$, $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ - ciało przemienne, $\# \mathbb{K} \geqslant 2$. Definiujemy dwa działania:
$" + ":\quad V \times V \to V$ - działanie wewnętrzne w V (dodawanie wektorów)
$" \cdot ":\quad \mathbb{K} \times V \to V$ - działanie zewnętrzne w V (mnożenie wektorów przez skalar)
Wówczas czwórkę $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ nazywamy **przestrzenią wektorową (liniową)** nad ciałem $\mathbb{K}$, jeśli spełnione są 4 aksjomaty:

   a) $(V, +)$ - grupa abelowa, tzn. działanie $+$ jest łączne, przemienne, posiada element neutralny, tzw. wektor zerowy $\overline{0}$ oraz każdy wektor w posiada element symetryczny $-w$
   b) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}: \qquad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
   c) $\forall u \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \qquad (\alpha \oplus \beta)u = \alpha u + \beta u$
   d) $\forall u \in V: \qquad \mathbf{1} \cdot u = u$, gdzie $\mathbf{1}$ element neutralny $\odot$.

Elementy zbioru V nazywamy **wektorami**, natomiast elementy ciała $\mathbb{K}$ - **skalarami**. Będziemy używać uproszczonego zapisu $V(\mathbb{K})$ - przestrzeń wektorowa V nad ciałem $\mathbb{K}$.

2) W szczególności dla $V = \mathbb{R}^n$, $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ mamy

   a) suma wektorów: $w = u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$
   b) mnożenie wektora przez skalar: $\alpha u = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$
   c) wektor zerowy: $\overline{0} := (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$
   d) wektor przeciwny: $-u = (-x_1, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$

3) Niech $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Podzbiór $U \neq \emptyset$ przestrzeni V nazywamy **podprzestrzenią wektorową (liniową)** wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

   a) $\forall u, v \in U: \quad u + v \in U$
   b) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall u \in U: \quad \alpha \cdot u \in U.$

4) Niech $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Podzbiór $\emptyset \neq U \subset V$ jest podprzestrzenią wektorową w V wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall u, v \in U: \quad \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in U.$

5) Niech $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa, $v_1, \ldots, v_k \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Wektor postaci $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$ nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $v_1, \ldots, v_k$ o współczynnikach $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

6) Niech $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa, $v_1, \ldots, v_k \in V$. Wektory $v_1, \ldots, v_k$ nazywamy liniowo niezależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}: \quad \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Wektory $v_1, \ldots, v_k$ nazywamy liniowo zależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy nie są liniowo niezależne, czyli $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}: \quad \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \overline{0} \quad \wedge \quad (\alpha_1 \neq 0 \vee \ldots \vee \alpha_k \neq 0).$

7) Niech $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa, $A \subset V$, $A \neq \emptyset$. Wówczas zbiór

$$\operatorname{lin} A := \{v \in V \mid v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k: \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}, v_1, \ldots, v_k \in A\}$$

nazywamy **powłoką liniową** zbioru A. Zbiór $\operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$ nazywamy **podprzestrzenią rozpiętą na wektorach** $v_1, \ldots, v_k$, a wektory $v_1, \ldots, v_k$ nazywamy **generatorami** tej podprzestrzeni.

Zadanie 1. Korzystając z definicji uzasadnij, że podany zbiór jest przestrzenią wektorową:

a) $\mathbb{R}[x]_2$ z dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianu przez liczby rzeczywiste,

b) $\{f \in \mathcal{C}[a,b] : f(a) = f(b) = 0\}$ z dodawaniem funkcji i mnożeniem przez liczby rzeczywisty,

c) zbiór macierzy rzeczywistych górnotrójkątnych stopnia 2 z dodawaniem macierzy i mnożeniem przez liczby rzeczywisty

d) $\mathbb{Z}_3^2$ z dodawaniem $+_3$ po współrzędnych, oraz mnożeniem $\cdot_3$ przez skalary z $\mathbb{Z}_3$.

Zadanie 2. Sprawdź, czy zbiór W jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V:

a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - 2z - t = y - t = x - y + t\}$, $V = \mathbb{R}^4$,

b) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : |x| = |y|, |z| = -|t|\}$, $V = \mathbb{R}^4$,

c) $W = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : p(x) = p(-x)\}$, $V = \mathbb{R}[x]_3$,

d) $W = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 :\ p(1) = p'(0)\}$, $V = \mathbb{R}[x]_2$,

e) $W = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) : A = A^T\}$, $V = M_{3\times3}(\mathbb{R})$,

f) $W = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$, $V = \mathbb{C}(\mathbb{C})$ oraz $V = \mathbb{C}(\mathbb{R})$,

g) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + 2b = 0, -3c + b - a = 0, 2d - b - c = 0 \right\}$, $W = M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Zadanie 3. Zbadaj liniową niezależność wektorów:

a) $v_1 = (1,4,3), v_2 = (-1,2,-1), v_3 = (0,6,4)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$,

b) $v_1 = (1,1,-1,3), v_2 = (1,4,2,0), v_3 = (1,2,0,2)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$,

c) $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = \cos x$ w przestrzeni $\mathcal{C}(\mathbb{R})$,

d) $w_1(x) = 3x^2 - 2x + 2, w_2(x) = 2x^2 - 2x + 2, w_3(x) = x^2 + x + 1$ w przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$,

e) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ w przestrzeni $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Zadanie 4. Wektory u, w, v, z są liniowo niezależne w przestrzeni V. Zbadaj liniową niezależność wektorów $b_1 = u - w + 2z, b_2 = v + z - 3u, b_3 = 2w + v + z - u, b_4 = z - 2u + v$.

Zadanie 5. Wykaż, że wektory u, v są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $u + v$ i $u - v$ są liniowo niezależne.

Zadanie 6. Udowodnij:

a) $\operatorname{lin}(\operatorname{lin} A) = \operatorname{lin} A$,

b) $\operatorname{lin} A \cup \operatorname{lin} B \subset \operatorname{lin}(A \cup B)$,

c) $\operatorname{lin}(A \cap B) \subset \operatorname{lin} A \cap \operatorname{lin} B$.