

**Zadanie 1.** Sprawdź, czy zbiór  $W$  jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni  $V$ :

- a)  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - 2 = 0, t - 2z + 2 = 0\}$ ,  $V = \mathbb{R}^4$ ,
- b)  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - t + z = 0, y - 2z = t, 3x + 3z = y\}$ ,  $V = \mathbb{R}^4$ ,
- c)  $W = \{p \in \mathbb{R}[x] : 2p(0) - 3p(1) = 0\}$ ,  $V = \mathbb{R}[x]$ ,
- d)  $W = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z + \bar{w} = 0\}$ ,  $V = \mathbb{C}(\mathbb{C})$  oraz  $V = \mathbb{C}(\mathbb{R})$ ,
- e)  $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$ , gdzie  $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$  oraz  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0$ ,  $V = \mathbb{R}^n$ .

**Zadanie 2.** Zbadaj liniową niezależność wektorów:

- a)  $v_1 = (1, -1, 2), v_2 = (3, 4, -1), v_3 = (2, 1, 0)$  w przestrzeni  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ,
- b)  $v_1 = (1, 0, -1, 1), v_2 = (0, 2, -1, 2), v_3 = (1, -1, 2, 2), v_4 = (0, 0, 3, -2)$  w przestrzeni  $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ,
- c)  $w_1(x) = 2 - x^3 - 3x^2, w_2(x) = x^3 + 3x + 2, w_3(x) = x^2 + x - 1$  w przestrzeni  $\mathbb{R}[x]_3$ ,
- d)  $w_1(x) = x^3 - x^2 + 2, w_2(x) = -2x^3 + x^2 + x + 3, w_3(x) = -x^3 + 2x^2 + 2x, w_4(x) = -2x^3 - x - 1$  w przestrzeni  $\mathbb{R}[x]_3$ ,
- e)  $f_1(x) = \arcsin x, f_2(x) = \arccos x, f_3(x) = 1$  w przestrzeni  $\mathcal{C}([-1, 1])$ ,
- f)  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  w przestrzeni  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ,
- g)  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  w przestrzeni  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

**Zadanie 3.** Wektory  $u, w, v, z$  są liniowo niezależne w przestrzeni wektorowej  $V$ . Zbadaj liniową niezależność wektorów:

- a)  $b_1 = 2u - v, b_2 = 3z + 2v, b_3 = 4w + 2z, b_4 = z - 2u + v$ ,
- b)  $b_1 = 3u - 2v + w, b_2 = 2u + 4v - z, b_3 = 2u - 3v + 5w - 4z$ .

**Zadanie 4.** Wykaż, że wektory  $u, v, w$  są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektory  $2u + v - 2w, u - 2v + w, u + v - 2w$  są liniowo niezależne.

**Zadanie 5.** Niech  $U, W$  będą podprzestrzeniami wektorowymi w  $\mathbb{R}^n$ . Udowodnij, że  $V = \{v \in \mathbb{R}^n : v = u + w, u \in U, w \in W\}$  jest także podprzestrzenią wektorową w  $\mathbb{R}^n$ .

**Zadanie 6.** Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową,  $A = \{v_1, \dots, v_k\}$  układem liniowo niezależnych wektorów tej przestrzeni i niech  $v \in V \setminus A$ . Udowodnij, że  $A \cup \{v\}$  jest układem liniowo niezależnym wtedy i tylko wtedy gdy  $v \notin \text{lin } A$ .