1) Niech $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa. Zbiór $B \subset V$ nazywamy **bazą** przestrzeni V jeśli jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych oraz $\operatorname{lin} B = V$ (każdy wektor z V jest skończoną kombinacją liniową wektorów z B).

2) **Reperem bazowym** danej przestrzeni wektorowej V nazywamy dowolną jej bazę, w której ustalono kolejność wektorów.

3) Niech $B = (e_1, \ldots, e_n)$ będzie reperem bazowym przestrzeni wektorowej $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$. Dla dowolnego wektora $v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in V$ skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ nazywamy **współrzędnymi wektora** v **względem bazy** B, co zapisujemy $v = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_B$. W danej bazie współrzędne są wyznaczone jednoznacznie.

4) Niech B będzie dowolną bazą przestrzeni wektorowej V.

   a) Jeśli B jest zbiorem skończonym, to mówimy, że V jest przestrzenią skończenie wymiarową, a liczbę wektorów w bazie B nazywamy **wymiarem** przestrzeni V i oznaczamy $\dim V$.

   b) Jeśli B składa się z nieskończonej liczby wektorów, to mówimy, że V jest nieskończenie wymiarowa i piszemy $\dim V = \infty$.

   c) Jeśli $V = \{\overline{0}\}$, to przyjmujemy $\dim V = 0$.

5) Niech V - przestrzeń wektorowa skończenie wymiarowa, $\dim V < \infty$, $U \subset V$ - podprzestrzeń wektorowa. Wtedy $\dim U \leqslant \dim V$ oraz $\dim U = \dim V \;\Leftrightarrow\; U = V$.

6) Niech $V(\mathbb{K})$ - przestrzeń wektorowa, $\dim V = k \in \mathbb{N}$. Wtedy:

   a) Każdy układ k wektorów generujących V jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych.

   b) Każdy układ k wektorów liniowo niezależnych generuje V.

7) Jeśli V_1, V_2 - podprzestrzenie wektorowe przestrzeni V, to $V_1 \cap V_2$ też jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V.

8) Jeśli V_1, V_2 - podprzestrzenie wektorowe przestrzeni V, to:

$$V_1 \cup V_2 \text{ - jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni } V \quad \Leftrightarrow \quad V_1 \subset V_2 \;\vee\; V_2 \subset V_1.$$

Zadanie 1. Zbadaj, czy podany zbiór wektorów tworzy bazę przestrzeni V:

a) $B = \{(-2,3,2),(1,-2,1),(1,-2,3)\}$, $V = \mathbb{R}^3$,

b) $B = \{2x+4, 3x-x^2, -2x^2+4x-4\}$, $V = \mathbb{R}[x]_2$,

c) $B = \{(1+i,-2,-i),(2-i,2,i),(-1+i,i,2)\}$, $V = \mathbb{C}^3(\mathbb{C})$,

d) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Zadanie 2. Znajdź bazę i wymiar poniższych przestrzeni wektorowych:

a) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x+y-z=0,\ 4x-3y-2z+t=0\}$,

b) $V = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : p(x+1)+p(-x)=0\}$,

c) $V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A + A^T = 0\}$,

d) $V = \operatorname{lin}\{1, x, \cos^2 x, \cos 2x, \sin^2 x\}$.

Zadanie 3. Znajdź bazę przestrzeni:

a) $\mathbb{R}[x]_5$ zawierającą wektory $1+x, x^2+x^3, x^4+x^5$,

b) $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ zawierającą wektory $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4. Znajdź współrzędne wektora v w bazie B:

a) $B = ((2,1,1),(3,2,1),(1,1,1))$, $v = (1,-2,-1)$,

b) $B = (-x^3-x^2+1, x^3+3x^2-x, x^2-1, 2x^3-2x+5)$, $v(x) = x^3+x^2+x-3$,

c) $B = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$, $v = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5. Niech $B = (u,v,w)$ będzie bazą $\mathbb{R}^3$. Wiedząc, że $u = (-1,1,2)$ dobierz wektory v oraz w takie, by wektory $s = (1,-4,5)$ oraz $t = (-7,14,-11)$ miały w tej bazie współrzędne odpowiednio $[2,1,-4]_B$ oraz $[0,2,5]_B$.

Zadanie 6. Niech $B = (v_1,v_2,v_3)$ będzie bazą w przestrzeni V. Czy wektory u_1,u_2,u_3 stanowią bazę V jeśli wiadomo, że:

1. $u_1 = [2,-1,0]_B, u_2 = [-1,2,-1]_B, u_3 = [1,-1,-1]_B$,
2. $u_1 = [2,1,3]_B, u_2 = [1,1,1]_B, u_3 = [-2,-2,3]_B$,
3. $u_1 = [0,-5,1]_B, u_2 = [1,-3,1]_B, u_3 = [3,2,1]_B$.

Jeśli tak, wyznacz współrzędne wektora $w = [1,2,1]_B$ w tej bazie.