Zadanie 1. Znajdź bazę B podprzestrzeni:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 5x_2 - x_4 = 0, x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\}$$

taką, że wektor $w = (7, -1, 5, 9)$ ma w bazie B współrzędne $[2, -1]_B$.

Zadanie 2.

1. Sprawdź który z podzbiorów jest podprzestrzenią wektorową:

   a) $U = \{(x, y, z) : xy \geqslant 0\}$, b) $V = \{(x_1, \ldots, x_n) : 2^{x_1+\cdots+x_n} = 1\}$.

2. Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni wektorowej:

$$W = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x + y - 3z - 3t = 0 \\ x + 3y - 9z - 7t = 0 \\ x - y + 3z + t = 0 \end{array} \right\}$$

Zadanie 3. Udowodnij, że zbiór:

$$V = \{(-a + b + c, 3a + 2b, 4a + b - c, -2a - 3b - c) \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wyznacz jej bazę i wymiar oraz współrzędne wektora $w = (0, -1, -1, 1)$ względem znalezionej bazy.

Zadanie 4. Sprawdź, czy zbiór:

$$W = \{w \in \mathbb{R}[x] : w(-1)w(1) = 0\}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}[x]$. Jeśli tak, wyznacz bazę i wymiar tej podprzestrzeni.

Zadanie 5. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$ definiujemy zbiory:

1. $A = \{w \in \mathbb{R}[x]_n : w(0) = w'(0) = 0\}$,
2. $B = \{w \in \mathbb{R}[x]_n : w''(0) = w^{(3)}(0) = \cdots = w^{(n)}(0) = 0\}$,
3. $C = \{w \in \mathbb{R}[x]_n : w(0) \cdot w(2) \geqslant 0\}$.

Które z tych podzbiorów są podprzestrzeniami wektorowymi $\mathbb{R}[x]_n$? Znajdź wymiary i bazy tych podprzestrzeni.

Zadanie 6. Wykaż, że zbiór $U = \{w \in \mathbb{R}[x]_3 : w(1) = w(2)\}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$. Znajdź bazę i wymiar przestrzeni U, a następnie znajdź współrzędne wektora $w(x) = x^3 - 2x^2 - x + 4$ w wyznaczonej bazie.

Zadanie 7. Wykaż, że zbiór $U = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : p(1) + p'(0) = p'(1) + p''(0) = 0\}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}[x]_4$. Znajdź bazę B przestrzeni U, a następnie wyznacz wektor p o współrzędnych $[3, -1, 2]_B$.