1) Niech $U_1, \ldots, U_n, V$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Odwzorowanie $f\colon U_1 \times \ldots \times U_n \to V$ nazywamy n-liniowym jeżeli jest liniowe ze względu na każdą zmienną z osobna. Do wykazania tego faktu można zastosować zarówno dwa warunki z definicji, albo warunek WKW. Warto zauważyć, że odwzorowanie wieloliniowe na ogół nie jest liniowe. Jeżeli wartości odwzorowania wieloliniowego są z ciała $\mathbb{K}$, to takie odwzorowanie jest nazywanę formą n-liniową.

2) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$. Wówczas iloczynem skalarnym nazywamy dowolną formę dwuliniową symetryczną $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{R}$, która jest dodatnio określona, tzn. $\forall v \in V, v \neq \overline{0}\ \varphi(v,v) > 0$. Przestrzeń wektorową V wraz z określonym na niej iloczynem skalarnym nazywamy euklidesową przestrzenią wektorową (V, φ).

3) W euklidesowej przestrzeni wektorowej (V, φ) definiujemy normę $\|v\| = \sqrt{\varphi(v,v)}$ oraz kąt między wektorami $u, v \in V$ jako liczbę $\alpha \in [0, \pi]$ taką, że $\cos\alpha = \frac{\varphi(u,v)}{||u|| \cdot ||v||}$.

4) Przestrzeń afiniczną X, której przestrzeń kierunkowa jest euklidesową przestrzenią wektorową nazywamy przestrzenią euklidesową. W przestrzeni euklidesowej definiujemy odległość między punktami $A, B \in X$ jako normę wektora $\overrightarrow{AB}$, tzn $d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}||$.

Zadanie 1. Sprawdź, czy następujące odwzorowania są dwuliniowe. Które z nich są symetryczne, a które antysymetryczne?

a) $f\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(w,z) = w \cdot \overline{z}$,

b) $f\colon\ \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(z,w) = z_1 w_1 - \overline{z_1} w_2 - z_2 \overline{w_1} + z_2 w_2$, gdzie $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2)$,

c) $f\colon\ \mathbf{M}_{2\times 2} \times \mathbf{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$, $f(A,B) = (\det A + \det B, \det(A \cdot B))$;

Zadanie 2. Udowodnij, że odwzorowanie $g(v,w) = 2v_1w_1 - 2v_1w_3 + v_2w_2 - 2v_3w_1 + 3v_3w_3$, gdzie $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$, jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^3$. Oblicz kąt między wektorami $v = (2,1,1)$ oraz $w = (-1,3,1)$ w euklidesowej przestrzeni wektorowej $(\mathbb{R}^3, g)$.

Zadanie 3. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ z iloczynem skalarnym $\varphi(p,q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ znajdź:

a) odległość punktu $w_1(x) = x^2 - x + 1$ od punktu $w_2(x) = -x^2 - 3x + 2$,

b) kąt pomiędzy wektorami $v_1(x) = x^2 - 3x + 2$ oraz $v_2(x) = 2x^2 + x - 1$.

Zadanie 4. Czy działanie $\circ$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ jeżeli:

a) $A \circ B = \det AB$, b) $A \circ B = \mathrm{tr}\ AB^T$?

Zadanie 5. W przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ określamy działanie $\star\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ takie, że:

$$A \star B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ij}.$$

Udowodnij, że $\star$ jest iloczynem skalarnym w $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Wyznacz kąt między wektorami $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ w euklidesowej przestrzeni wektorowej $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \star)$.