

Zadanie 1. Sprawdź, czy następujące odwzorowania są dwuliniowe. Które z nich są symetryczne, a które antysymetryczne?

- a) $f: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $f(z, w) = (\bar{z}_2 w_3 - \bar{w}_2 z_3, \bar{w}_3 z_1 - \bar{z}_3 w_1, \bar{z}_1 w_2 - \bar{w}_1 z_2)$, gdzie $z = (z_1, z_2, z_3)$ oraz $w = (w_1, w_2, w_3)$;
- b) $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_3 y_1 - 2x_3 y_2 + 2x_2 y_3$, gdzie $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$;
- c) $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(a, b) = a \times b$.

Zadanie 2. Udowodnij, że odwzorowanie $\varphi(p, q) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}_n[x]$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla $v, w \in \mathbb{R}^n$ zachodzi:

- a) $v \perp w \Leftrightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$;
- b) $(v + w) \perp (v - w) \Leftrightarrow \|v\| = \|w\|$.

Zadanie 4.

- a) W przestrzeni $\mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ określamy działanie $\star: \mathbf{M}_{n \times n} \times \mathbf{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$A \star B = \text{tr} \left(A^T B + A B^T \right).$$

Udowodnij, że $\star$ jest iloczynem skalarnym macierzy w $\mathbf{M}_{n \times n}$.

- b) Korzystając z definicji $\star$ oblicz kąt między wektorami $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
- c) Oblicz odległość między punktami $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.