

Zadanie 1. Oblicz długości przekątnych równoległoboku zbudowanego na wektorach: $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ oraz $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, gdzie $\|\vec{p}\| = 2$, $\|\vec{q}\| = 3$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

Zadanie 2. Napisz równanie normalne, ogólne, parametryczne i odcinkowe płaszczyzn spełniających warunki:

- a) przechodzącej przez punkty $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (-1, 0, 1)$, $P_3 = (5, 6, 7)$;
- b) przechodzącej przez punkt $P = (1, -1, -2)$ i równoległej do wektorów $\vec{a} = [-1, 2, 2]$, $\vec{b} = [3, 1, -1]$.
- c) przechodzącej przez punkt $P = (-2, 3, -1)$ i równoległej do płaszczyzny $\pi: -3x + 2y + 6z + 7 = 0$;
- d) przechodzącej przez punkt $P = (2, 3, -1)$ i prostopadłej do płaszczyzn $\pi_1: -x + 2y + 2z - 5 = 0$ oraz $\pi_2: 3x + y - z + 2 = 0$.

Zadanie 3. Napisz równanie parametryczne i kierunkowe prostych spełniających warunki:

- a) przechodzącej przez punkty $P_1 = (1, 2, -3)$, $P_2 = (-2, 2, 4)$;
- b) przechodzącej przez punkt $P = (1, -2, 1)$ i prostopadłej do płaszczyzny $\pi: 3x - y + 2z - 6 = 0$;
- c) przechodzącej przez punkt $P = (2, 2, -1)$ i prostopadłej do wektorów $\vec{v}_1 = [2, -1, -3]$, $\vec{v}_2 = [-1, 2, 1]$;
- d) przechodzącej przez punkt $P = (2, 2, -1)$ i równoległej do płaszczyzn $\pi_1: 2x - y - 3z = 1$, $\pi_2: -x + 2y + z = -2$;
- e) będącej dwusieczną kąta utworzonego przez proste $l_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+4}{5}$ oraz $l_2: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$.

Zadanie 4. Zbadaj czy:

- a) prosta $m: \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ jest zawarta w płaszczyźnie $\pi: 5y - 3z + 13 = 0$;
- b) punkty $A = (0, 1, 5)$, $B = (1, 2, 3)$ należą do $\pi: \begin{cases} x = -1 + s + t \\ y = 2 + 3s - t \\ z = 3 - s + 2t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$;
- c) proste $l_1: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-8}$, $l_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ mają punkt wspólny.

Zadanie 5. Oblicz miarę kąta między:

- a) prostą $l: \frac{x-1}{-2} = y - 1 = 1 - z$ a płaszczyzną $\pi: x - y + z = -5$;
- b) płaszczyznami $\pi_1: x - 2y + 3z - 5 = 0$, $\pi_2: 2x + y - z + 3 = 0$;
- c) prostymi $l_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 3t \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$ oraz $l_2: \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 4 - s \\ z = 2 + 3s \end{cases}$ gdzie $s \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6. Oblicz odległość:

- a) płaszczyzn $\pi_1: 2x + y - 2z = 0$, $\pi_2: x + y - 3z + 5 = 0$;
- b) płaszczyzn $\pi_1: x - 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_2: 3x - 6y + 6z - 3 = 0$;
- c) prostych $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$, $l_2: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{2}$;
- d) prostych $l_1: \begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases}$, $l_2: \begin{cases} x = -2s \\ y = -7 + 9s \\ z = 2 + 2s \end{cases}$, gdzie $t, s \in \mathbb{R}$;
- e) prostej $l: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, od płaszczyzny $\pi: 2x + y + 4z = 0$.

Zadanie 7. Znajdź punkt symetryczny do punktu $P = (2, 3, -1)$ względem:

- a) punktu $O = (-1, 3, 2)$;
- b) prostej $l: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$;
- c) płaszczyzny $\pi: 2x - y + z - 6 = 0$.

Zadanie 8.

- a) Zbadaj wzajemne położenie prostych:
 $l: \begin{cases} -x + 2y - z + 6 = 0 \\ -3x + 3y - z + 11 = 0 \end{cases}$ oraz $k: \begin{cases} 2x + y + z + 4 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$.
- b) Jeżeli l oraz k są równoległe, to wyznacz równanie płaszczyzny, która je zawiera, natomiast jeżeli są to proste skośne, to oblicz ich odległość.
- c) Wyznacz równanie prostej m prostopadłej do prostych l oraz k i przechodzącej przez punkt $A = (1, 1, 1)$.

Zadanie 9. Dany jest sześcian o boku a . Oblicz odległość pomiędzy prostymi skośnymi, z których jedna zawiera przekątną podstawy sześcianu, a druga przekątną ściany bocznej.

Zadanie 10. Dane są trzy płaszczyzny: $\pi_1: -x + y - 2z = 0$, $\pi_2: x - 3y + 3z = 0$ oraz $\pi_3: x + y + z = 2$.

- a) Wyznacz prostą l_1 będącą przecięciem płaszczyzn π_1 i π_3 oraz prostą l_2 będącą przecięciem płaszczyzn π_2 i π_3 .
- b) Wyznacz odległość pomiędzy prostymi l_1 oraz l_2 .
- c) Podaj punkt $C = (x_0, y_0, z_0)$ leżący na prostej l_1 taki, że $z_0 = 0$, a następnie wyznacz punkt C' symetryczny do punktu C względem prostej l_2 .

Zadanie 11. Napisz równania ogólne i parametryczne płaszczyzn, które są dwusiecznymi kątów dwuściennych utworzonych przez płaszczyzny:

$$\pi_1: 5x + y - z + 24 = 0 \quad \text{oraz} \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1 + 2s - t \\ y = 1 + s - 2t \\ z = -s - t \end{cases}, \quad \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 12. Wyznacz równania parametryczne oraz zbadaj wzajemne położenie prostych:

$$l_1: \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

Jeżeli się przecinają, znajdź ich punkt wspólny. Oblicz kąt i odległość między tymi prostymi.

Zadanie 13. Dane są punkty $A = (2, -1, 1)$, $B = (3, -3, 3)$, $C = (1, 3, -2) \in \mathbb{R}^3$.

- Wyznacz równanie ogólne płaszczyzny π zawierającej punkty A , B , C .
- Wyznacz równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez punkty A i D , gdzie D jest dowolnym punktem o odległości 3 od płaszczyzny π takim, że B jest rzutem prostokątnym punktu D na płaszczyznę π .
- Wyznacz miarę kąta między prostą l i płaszczyzną π .
- Wyznacz objętość czworościanu $ABCD$.