Zadanie 1. Napisz równanie normalne, ogólne, parametryczne i odcinkowe płaszczyzn spełniających warunki:

a) przechodzącej przez punkty $P_1 = (-2, 1, 0)$, $P_2 = (1, 2, 3)$, $P_3 = (-3, 4, 1)$;

b) przechodzącej przez punkt $P = (3, 2, -1)$ i równoległej do wektorów $\overrightarrow{a} = [-2, 1, 1]$, $\overrightarrow{b} = [4, -1, 2]$.

c) przechodzącej przez punkt $P = (2, 2, -1)$ i równoległej do płaszczyzny $\pi\colon\ -x + 3yz - 5 = 0$;

d) przechodzącej przez punkt $P = (1, 1, 1)$ i prostopadłej do płaszczyzn $\pi_1\colon 2x + y - 3z + 8 = 0$ oraz $\pi_2\colon\ x + y - z + 4 = 0$.

Zadanie 2. Napisz równanie parametryczne i kierunkowe prostych spełniających warunki:

a) przechodzącej przez punkty $P_1 = (3, -4, 2)$, $P_2 = (1, 1, -3)$;

b) przechodzącej przez punkt $P = (2, 1, -1)$ i prostopadłej do płaszczyzny $\pi\colon\ 5x - 4y + 3z + 2 = 0$;

c) przechodzącej przez punkt $P = (1, 1, 1)$ i prostopadłej do wektorów $\overrightarrow{v_1} = [1, -1, 2]$, $\overrightarrow{v_2} = [2, 1, 3]$;

d) przechodzącej przez punkt $P = (-3, 1, 4)$ i równoległej do płaszczyzn $\pi_1\colon x + y - 3z = 1$, $\pi_2\colon x + 2y - 3z = -3$;

Zadanie 3. Znajdź punkt, w którym przecinają się proste:

$$l_1\colon \begin{cases} x + 2y - z + 4 &= 0 \\ y + z - 3 &= 0 \end{cases} \quad \text{oraz } l_2\colon \begin{cases} 2x - y - 2z + 8 &= 0 \\ x + 2y + 2z - 5 &= 0 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Znajdź punkt przecięcia się płaszczyzn $\pi_1\colon\ 3x + y + z + 1 = 0$, $\pi_2\colon\ x + 2z + 6 = 0$, $\pi_3\colon\ 3y + 2z = 0$.

Zadanie 5. Oblicz odległość:

a) płaszczyzn $\pi_1\colon\ -3x + 2y + 7z = 2$, $\pi_2\colon\ -5x + 4y + 2z - 1 = 0$;

b) płaszczyzn $\pi_1\colon\ 3x - 2y + 5z - 1 = 0$, $\pi_2\colon\ -6x + 4y - 10z + 5 = 0$;

c) prostych $l_1\colon\ x + 1 = 2 - y = -z$, $l_2\colon\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-1}$;

d) prostych $l_1\colon \begin{cases} x &= 1 - 3t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 + 2t \end{cases}$, $l_2\colon \begin{cases} x &= 2 + 6s \\ y &= -7 - 2s \\ z &= 1 - 4s \end{cases}$, gdzie $t, s \in \mathbb{R}$;

e) prostej $l\colon \begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= 2 + t \\ z &= 3 + 3t \end{cases}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, od płaszczyzny $\pi\colon\ 4x - 5y + 3z = 2$.

Zadanie 6. Oblicz miarę kąta między:

a) prostą $l\colon\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = z+2$ a płaszczyzną $\pi\colon\ x+2y-z=-1$;

b) płaszczyznami $\pi_1\colon\ 2x-3y+z-1=0$, $\pi_2\colon\ x+y-4z+7=0$;

c) prostymi $l_1\colon \begin{cases} x &= 2-t \\ y &= 1+2t \\ z &= -4t \end{cases}$ gdzie $t\in\mathbb{R}$ oraz $l_2\colon \begin{cases} x &= 1-3s \\ y &= 2-2s \\ z &= 3-s \end{cases}$ gdzie $s\in\mathbb{R}$.

Zadanie 7. Zbadaj wzajemne położenie prostych:

$$l_1 : \begin{cases} x+y+2z-1 &= 0 \\ 2x-y+4z-3 &= 0 \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad l_2 : \begin{cases} x-y+5z+2 &= 0 \\ 2x+3y-4z &= 0 \end{cases}$$

Zadanie 8. Zbadaj wzajemne położenie prostych:

$$l_1 : \begin{cases} x+2y-z+1 &= 0 \\ x-3y-z-5 &= 0 \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad l_2 : \begin{cases} x-2y-3z+1 &= 0 \\ 2x+y+5z &= 0 \end{cases}$$

Zadanie 9. Punkty $A=(1,2,2)$, $B=(-1,1,2)$, $C=(2,1,-1)$, $D=(3,-1,0)$ są wierzchołkami

czworościanu. Napisz równanie wysokości tego czworościanu opuszczonej z wierzchołka A oraz wyznacz spodek tej wysokości (pkt przecięcia z podstawą). Oblicz objętość tego czworościanu.

Zadanie 10. Dane są prosta $k\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$ oraz płaszczyzna $\pi\colon\ -2x+y-z=-8$.

a) Wyznacz punkty A i B, które są rzutami prostokątnymi punktu $P=(1,1,1)$ odpowiednio na prostą k oraz płaszczyznę π.

b) Zbadaj wzajemne położenie prostej k oraz prostej przechodzącej przez punkty P i $C=(1,2,2)$. Jeżeli są skośne, to oblicz ich odległość.

c) Oblicz pole czworokąta $ABPC$. Jaka to figura?

Zadanie 11. Dane są punkty $A=(3,-2,3)$, $B=(1,0,-1)$, $C=(1,-2,1)$ oraz prosta:

$$l\colon \begin{cases} x+y &= 3 \\ x-y-z &= -1 \end{cases}.$$

Zbadaj wzajemne położenie prostej k przechodzącej przez punkty A i B oraz prostej l. Wyznacz odległość tych dwóch prostych. Znajdź rzut prostokątny C' punktu C na prostą l. Oblicz objętość czworościanu o wierzchołkach A,B,C,C'.

Zadanie 12. Zbadaj wzajemne położenie prostych $l_1\colon \frac{x-4}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$ oraz $l_2\colon \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{-1}$. Wyznacz równanie ogólne płaszczyzny π zawierającej prostą l_1 i jednocześnie równoległej do prostej l_2. Oblicz odległość prostej l_2 od tej płaszczyzny.

Zadanie 13. Dany jest czworościan foremny $ABCD$ o boku długości $a > 0$. Niech K, L, M będą środkami krawędzi odpowiednio AD, BD i CD.

a) Znajdź równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkty K, L i C.

b) Oblicz odległość punktu M od płaszczyzny π.

Zadanie 14. Zbadaj wzajemne położenie prostych k oraz l i oblicz ich odległość, jeżeli:

$$k\colon \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}, \qquad\qquad l\colon \quad \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 2 + s \\ z = 1 - 2s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}\,.$$