1) Zbiór niezerowych wektorów w przestrzeni euklidesowej jest układem wektorów ortogonalnych jeżeli każde dwa różne wektory są do siebie ortogonalne. Jeżeli ponadto każdy wektor ma normę równą 1, to taki układ nazywamy układem ortonormalnym.

2) Każda euklidesowa przestrzeń wektorowa posiada bazę ortonormalną. Bazę ortonormalną można skonstruować z dowolnej bazy przestrzeni poddając ją procesowi ortogonalizacji Grama-Schmidta.
Dla przestrzeni (V, φ) oraz bazy $B = (v_1, \ldots, v_n)$ tej przestrzeni konstrukcja bazy ortogonalnej B_O przebiega następująco:

   1. przyjmujemy: $e_1 = \frac{v_1}{||v_1||} \in B_O$,
   2. definiujemy: $u_2 = v_2 + \alpha_1 e_1$, następnie z warunku: $\varphi(v, e_1) = 0$ wyznaczamy α_1 i obliczamy u_2.
   3. przyjmujemy: $e_2 = \frac{u_2}{||u_2||} \in B_O$,
   4. dla $3 \leqslant i \leqslant k$ powtarzamy poniższe kroki:
      a) definiujemy: $u_i = v_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j e_j$, następnie z warunków $\varphi(u_i, e_j) = 0$ wyznaczamy α_j, $j = 1, \ldots, i-1$ i obliczamy u_i,
      b) przyjmujemy $e_i = \frac{u_i}{||u_i||} \in B_O$.

   $B_O = (e_1, \ldots, e_n)$ jest bazą ortonormalną V.

3) Dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni U w przestrzeni euklidesowej (V, φ) nazywamy taką podprzestrzeń $U^\perp = \{v \in V : \forall w \in U \ \varphi(v, w) = 0\} \subset V$. Ponadto zachodzi $U \oplus U^\perp = V$.

Zadanie 1. Znajdź dopełnienie ortogonalne przestrzeni:

a) $U \subset \mathbb{R}^4$, $U = \text{lin}((1, 0, 1, -1), (2, 1, -1, 3))$,

b) $U \subset \mathbb{R}[x]_3$, $U = \text{lin}\,(-x^3 + 2x^2 + 1, 2x^3 - x^2 + 2x + 3)$ z iloczynem skalarnym $\varphi(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$.

Zadanie 2. Znajdź bazy ortonormalne przestrzeni:

a) $U = \text{lin}((1, -1, 2), (0, 1, 2), (-1, 2, 1))$ z iloczynem skalarnym g zdefiniowanym następująco:

$$g(v, w) = 2v_1w_1 - 2v_1w_3 + v_2w_2 - 2v_3w_1 + 3v_3w_3.$$

Wyznacz współrzędne wektora $u = (-1, 4, 6)$ w znalezionej bazie.

b) $U = \{(2x + y + 5z, y + z, 2y - x, x + 2z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Wyznacz współrzędne wektora $u = (6, 4, 7, 1)$ w znalezionej bazie.

c) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a+b+d & -2a+b+2c \\ 2a+b-c & b-2c-d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ z iloczynem skalarnym $A \circ B = \text{tr}\, AB^T$. Wyznacz współrzędne wektora $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ w znalezionej bazie.