1) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$, zaś $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ formą dwuliniową. Odwzorowanie $g\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy formą kwadratową generowaną przez f wtw, gdy $\forall\ v \in V\ g(v) = f(v, v)$. Wiele form dwuliniowych może generować tę samą formę kwadratową, ale wśród nich istnieje dokładnie jedna symetryczna forma dwulinowa, która jest nazywana formą biegunową.

2) Formę kwadratową $g\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy:

   - dodatnio określoną jeśli $\forall\ v \in V, v \neq \overline{0}\ g(v) > 0$;
   - ujemnie określoną jeśli $\forall\ v \in V, v \neq \overline{0}\ g(v) < 0$;
   - nieujemnie określoną jeśli $\forall\ v \in V\ g(v) \geqslant 0$;
   - niedodatnio określoną jeśli $\forall\ v \in V\ g(v) \leqslant 0$;
   - nieokreśloną jeśli $\exists\ v, u \in V\ g(v) > 0, g(u) < 0$.

3) Niech $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową, zaś $B = (e_1, \ldots, e_n)$ pewną bazą przestrzeni V. Wóczas macierz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, gdzie $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej f w bazie B. Wówczas formę f można zapisać macierzowo: $f(x, y) = X^T AY$, gdzie $X = [x_1, \ldots, x_n]_B$, $Y = [y_1, \ldots, y_n]_B$. Macierz formy kwadratowej g to jest macierz formy biegunowej generującej tę formę kwadratową g.

4) Jeżeli A, A' są macierzami formy kwadratowej $g\colon V \to \mathbb{R}$ w bazach odpowiednio B i B' przestrzeni V, to wówczas $A' = P^T AP$, gdzie $P = P_{B\to B'}$.

5) Niech $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową. Jeżeli istnieje baza $B = (e_1, \ldots, e_n) \subset \mathbb{R}^n$ oraz liczby $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego wektora $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ formę g można zapisać w postaci $g(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots a_nx_n^2$, to tę postać nazywamy postacią kanoniczną formy kwadratowej g. Zgodnie z prawem bezwładności formy kwadratowej ilość dodatnich i ujemnych współczynników w postaci kanonicznej nie zależy od metody sprowadzania tej formy do postaci kanonicznej.

6) Jeżeli $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ jest macierzą formy kwadratowej $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w bazie $B = (e_1, \ldots, e_n)$, to zgodnie z tw. Sylvestera prawdą jest, że:

   - forma g jest dodatnio określona $\Leftrightarrow \forall\ k \in \{1, \ldots, n\}\ A_k > 0$,
   - forma g jest ujemnie określona $\Leftrightarrow \forall\ k \in \{1, \ldots, n\}\ (-1)^k A_k > 0$.

   gdzie A_k jest minorem głównym macierzy A stopnia k. Zwracam uwagę, że tw. Sylvestera nic nie mówi o przypadku, gdy którykolwiek z minorów jest równy 0.

Zadanie 1. Dana jest forma:

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + 2x_1y_3 - 3x_2y_3 - x_2y_1 + 2x_3y_2 - x_3y_1,$$

gdzie $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$. Wykaż, że f jest formą dwuliniową oraz wyznacz macierz formy f w bazie kanonicznej. Znajdź macierz formy f w bazie $B_1 = ((1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,-1))$.

Zadanie 2. Macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ jest macierzą formy dwuliniowej f w bazie $B = ((-1,1,1),$ $(2,0,-1),(1,2,0))$. Znajdź formę kwadratową g generowaną przez f oraz zapisz ją w postaci macierzowej w bazie kanonicznej.

Zadanie 3. Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą formy kwadratowej φ w bazie standardowej.

a) Podać dwie różne formy dwuliniowe f_1 i f_2 takie, że forma kwadratowa jest formą skojarzoną z f_1, f_2.

b) Podać formę dwuliniową symetryczną f taką, że forma φ jest skojarzona z formą f.

Zadanie 4. Dana jest forma kwadratowa:

$$g(v) = x^2 + 2xy - 4xz + 2yz + z^2.$$

Sprowadź formę g do postaci kanonicznej metodą:

a) przekształceń ortogonalnych, b) Lagrange'a, c) Jacobiego.

Zadanie 5. Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową przyjmującą dla dowolnych $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ wartość $f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_1y_3 + x_3y_1$.

a) Wyznaczyć formę kwadratową $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ generowaną przez formę f oraz macierz A formy g w bazie kanonicznej B_k.

b) Metodą przekształceń ortogonalnych znaleźć ortonormalną bazę B_O, w której forma kwadratowa g ma postać kanoniczną.

c) Sprowadzić formę g do postaci kanonicznej metodą Lagrange'a.

Zadanie 6. Sprowadź poniższą formę kwadratową do postaci kanonicznej metodą Lagrange'a:

$$g(x,y,z,t) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4t^2 + 2xy - 4xz - 2yz + 4yt.$$

Zadanie 7. Zbadaj określoność poniższych form kwadratowych:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3,$

b) $g(x) = x^T Ax$, gdzie $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.