

Zadanie 1. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane są formy określone związkami:

a) $f(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_3 - 2x_1y_3 + x_2y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_1,$

b) $f(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 8x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_1,$

gdzie $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$. Wykaż, że każda z tych form jest formą dwuliniową oraz wyznacz macierze tych form w bazie kanonicznej oraz w bazie $B_1 = ((1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, -1))$.

Zadanie 2. Dana jest macierz A formy dwuliniowej f w bazie $B = ((-1, 1, 1), (2, 0, -1), (1, 2, 0))$. Znajdź formę kwadratową g generowaną przez f oraz zapisz ją w postaci macierzowej w bazie kanonicznej jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix},$ b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Zadanie 3. Dana jest forma dwuliniowa $f(x, y) = x^T A y$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą formy f w bazie $B = ((2, 0, 1), (-1, 1, -1), (0, -1, 1))$, natomiast $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$. Wyznacz $f(x, y)$.

Zadanie 4. Niech $f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową przyjmującą dla dowolnych $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ wartość:

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^4 x_i y_j \left(= \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 x_i y_j \right) \right).$$

- Wyznacz formę kwadratową $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ generowaną przez formę f oraz macierz A formy g w bazie kanonicznej B_k .
- Metodą przekształceń ortogonalnych znajdź ortonormalną bazę B_O , w której forma kwadratowa g ma postać kanoniczną.
- Podaj macierz tej formy kwadratowej w wyznaczonej bazie B_O i przy jej pomocy wyznacz $g(1, 1, 1, 1)$.

Zadanie 5. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$

- Znajdź ortogonalną macierz P i diagonalną D taką, że $D = P^T A P$.
- Formę kwadratową $f(x) = X^T A X$ sprowadź do postaci kanonicznej metodą Lagrange'a.

Zadanie 6. Zbadaj określoność poniższych form kwadratowych:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2;$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3 + 5x_2^2 + 2x_3^2.$