

I. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ są tego samego znaku

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 & \text{elipsoida} \\ 0 & \text{punkt} \\ -1 & \text{zbiór pusty} \end{cases}$$

II. dwie spośród wartości $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ są tego samego znaku

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 & \text{hiperboloida jednowłokowa} \\ 0 & \text{stożek eliptyczny} \\ -1 & \text{hiperboloida dwuwłokowa} \end{cases}$$

III. $\lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 \neq 0 \wedge \lambda_3 = 0$ oraz $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 2z & \text{paraboloida eliptyczna} \\ 1 & \text{walec eliptyczny} \\ 0 & \text{prosta (oś z)} \\ -1 & \text{zbiór pusty} \end{cases}$$

IV. $\lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 \neq 0 \wedge \lambda_3 = 0$ oraz $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 2z & \text{paraboloida hiperboliczna} \\ 1 & \text{walec hiperboliczny} \\ 0 & \text{dwie płaszczyzny przecinające się} \end{cases}$$

V. $\lambda_1 = \lambda_3 = 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$

$$y^2 = \begin{cases} 2px & \text{walec paraboliczny} \\ a^2 & \text{dwie płaszczyzny równoległe} \\ 0 & \text{płaszczyzna} \\ -a^2 & \text{zbiór pusty} \end{cases}$$

Zadanie 1.

- a) Udowodnij, że jeżeli forma dwuliniowa jest symetryczna, to macierz tej formy w każdej bazie jest symetryczna.
- b) Dana jest forma dwuliniowa $\varphi(u, v) = 2x_1y_1 + 6x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_1y_3 + 4x_3y_1$, gdzie $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$. Zapisz tę formę w postaci macierzowej przyjmując:
- 1° bazę standardową $B = (e_1, e_2, e_3)$,
2° bazę $B_1 = (e_1 + e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$.
- c) Wyznacz formę kwadratową $f(u)$ skojarzoną z formą dwuliniową φ , a następnie podaj formę biegunową dla f .

Zadanie 2. Sprowadź formę kwadratową $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = -4x_2x_3 - 2x_1x_2 - 4x_3x_4 - 4x_1x_4$ do postaci kanonicznej metodą Lagrange'a, a następnie podaj formę biegunową dla g i zapisz ją macierzowo w bazie kanonicznej.

Zadanie 3. Zbadaj jaką powierzchnię przedstawia równanie:

- a) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + \frac{2}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}x_3 - 6 = 0$,
- b) $-x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + \sqrt{6}x_1 + \sqrt{6}x_2 + \sqrt{6}x_3 = 0$,
- c) $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0$,
- d) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz + x - 3y - z + \frac{5}{12} = 0$.

Podaj przekształcenie ortogonalne zadające nowe współrzędne, w których równanie tej powierzchni ma postać kanoniczną. Naszkicuj tę powierzchnię w znalezionym układzie współrzędnych.

Zadanie 4. Wypisz formę biegunową formy kwadratowej:

$$g(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz$$

Następnie sprowadź g do postaci kanonicznej metodą Jacobiego. Wypisz bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której g ma postać kanoniczną oraz wzór przekształcenia sprowadzającego g do tej postaci.

Zadanie 5. Znajdź bazę ortonormalną w $\mathbb{R}^3$ i macierz C przejścia do niej z bazy kanonicznej taką, że dla $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ forma kwadratowa:

$$g(x, y, z) = X^T F X = 4x^2 - 4xy + y^2 - 4xz + 2yz + z^2$$

ma w tej nowej bazie postać kanoniczną. Oblicz $C^T F C$.