Zadanie 1. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Znajdź ortogonalną macierz P i diagonalną macierz D taką, że $D = P^T AP$.
Wskazówka: Wiadomo, że $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 10$ są wartościami własnymi macierzy A.

b) Formę kwadratową $f(x) = X^T AX$ sprowadź do postaci kanonicznej metodą Lagrange'a.

Zadanie 2. Dana jest forma kwadratowa $g(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$.

a) Wyznacz formę biegunową dla g.

b) Sprowadź $g(x)$ metodą Lagrange'a do postaci kanonicznej.

c) Wyznacz macierz formy $g(x)$ w bazie $B = ((1, -1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

d) Zbadaj określoność formy g.

Zadanie 3. Zbadaj określoność formy kwadratowej $g(x, y, z) = 5x^2+14y^2+5z^2-16xy-16yz+10xz$ oraz podaj formę biegunową dla g i zapisz ją macierzowo w bazie kanonicznej.

Zadanie 4. Zbadaj jaką powierzchnię przedstawia równanie:

a) $-4y^2 - 2z^2 + 4\sqrt{2}yz + 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y + \frac{5}{3} = 0$,

b) $-x^2 - 3y^2 - z^2 + 2xy + 2yz - 2xz + 2y + 4z - 3 = 0$.

Podaj przekształcenie ortogonalne zadające nowe współrzędne, w których równanie tej powierzchni ma postać kanoniczną. Naszkicuj ją w znalezionym układzie współrzędnych.

Zadanie 5. Dana jest forma dwuliniowa $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ przyjmująca dla dowolnych $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ wartość $f(x, y) = 3x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_1y_2 + 4x_1y_3 + 4x_2y_3 - 6x_3y_2$.

a) Znajdź formę kwadratową $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ generowaną przez formę dwuliniową f oraz podaj macierz formy g w bazie standardowej.

b) Metodą przekształceń ortogonalnych znajdź ortonormalną bazę B_O, w której forma kwadratowa g ma postać kanoniczną.

c) Podaj macierz g w bazie B_O i korzystając z tej macierzy oblicz $g\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

d) Jaką powierzchnię przedstawia równanie $g(x_1, x_2, x_3) + 2x_1 - x_2 - x_3 + \frac{1}{4} = 0$?

Zadanie 6. Sprowadź formę kwadratową $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4xz - 6yz$$

do postaci kanonicznej metodą Jacobiego. Wypisz bazę B przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której g ma postać kanoniczną oraz podaj wzór przekształcenia sprowadzającego g do tej postaci.