1) Niech U, V będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$.
Odwzorowanie $f : U \to V$ nazywamy odwzorowaniem liniowym jeśli:

- $\forall u, w \in U: \ f(u + w) = f(u) + f(w)$ – jest addytywne,
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in U: \ f(\alpha u) = \alpha f(u)$ – jest jednorodne.

Do sprawdzenia liniowości można też wykorzystać warunek konieczny i wystarczający na liniowość:
$$f \text{ – liniowe} \quad \Leftrightarrow \quad \forall u, w \in U \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad f(\alpha u + \beta w) = \alpha f(u) + \beta f(w).$$

2) Jądrem odwzorowania f nazywamy podprzestrzeń
$$\ker f = \{u \in U \colon f(u) = \overline{0}_V\} \subset U,$$
natomiast obrazem odwzorowania f nazywamy podprzestrzeń
$$\operatorname{im} f = \{v \in V \ \exists u \in U \colon f(u) = v\} \subset V.$$
Dla obydwu przestrzeni możemy wyznaczyć bazy $B_{\ker f}$, $B_{\operatorname{im} f}$ oraz wymiary, dla których prawdziwa jest własność:
$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim U.$$

3) Jeżeli $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ jest bazą przestrzeni U, $f \colon U \to V$ jest odwzorowaniem liniowym, to wówczas $\operatorname{im} f = \operatorname{lin}\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$.

4) Rzędem odwzorowania f nazywamy wymiar obrazu tego odwzorowania (o ile jest skończony).

5) Odwzorowanie liniowe jest monomorfizmem (liniowość + iniekcja) wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker f = \{\overline{0}\}$ lub, równoważnie, $\operatorname{rz}(f) = \dim V$.

6) Odwzorowanie liniowe jest epimorfizmem (liniowość + suriekcja) wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rz}(f) = \dim V$.

7) Jeżeli f jest jednocześnie mono- i epimorfizmem, to jest izomorfizmem (liniowość + bijekcja). Wówczas jest odwzorowaniem odwracalnym.

8) Odwzorowanie liniowe jest endomorfizmem jeżeli $U = V$, a automorfizmem jeżeli dodatkowo jest bijekcją.

Zadanie 1. Sprawdź, czy podane odwzorowania są liniowe. Dla tych odwzorowań, które są liniowe, wyznacz $\ker f$, $\operatorname{im} f$, ich bazy i wymiary.

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad f(x,y,z) = (y - x + z, 3x - y - z, 2z + 3x)$;

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\quad f(x,y,z) = (x - y - 2, 2 + y - z, z + y, x - 2y)$;

c) $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_1$, $\quad (f(ax^2 + bx + c))(x) = (2a - b + 3c)x - a - 2b + c$;

d) $f\colon \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$, $\quad (f(p))(x) = xp'(x+1) - p(x+1)$;

e) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$; (rozważ dwa przypadki: w przestrzeni $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ oraz $\mathbb{C}(\mathbb{R})$)

f) $f\colon \mathbf{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}[x]_2$, $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a - b + d)x^2 + (-2c + a - d)x + b - 2c + d$.

Zadanie 2. Skonstruuj poniższe odwzorowania liniowe oraz wyznacz dla nich $\ker f$, $\operatorname{im} f$, ich bazy i wymiary.

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ oraz $f(1,1,2) = (1,-2)$, $f(1,2,0) = (3,-4)$, $f(0,1,-1) = (1,-3)$;

b) $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ oraz $(f(x+1))(x) = -x^2 + 4x - 2$, $(f(x^2 - 2))(x) = x^2 + x - 2$, $(f(x^2 + x))(x) = x - 3$;

c) $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbf{M}_{2\times 2}$ oraz $f(x^2 - 2x + 1) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x-1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, $f(2x^2 + 2x - 1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3. Skonstruuj odwzorowanie liniowe f wiedząc, że:

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ker f = \{(x,y,z)\colon\ x + y = 0,\ y + z = 0\}$, $\operatorname{im} f = \{(x,y,z)\colon\ x - y - z = 0\}$;

b) $f\colon\ \mathbf{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}[x]_2$, $\ker f = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + b - c = 0,\ a - 2b + d = 0\right\}$, $\operatorname{im} f = \{w \in \mathbb{R}[x]_2 \colon w(1) = 0\}$;

c) $f\colon\ \mathbf{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$, $\ker f = \left\{\begin{bmatrix} z+t & z-t \\ z & t \end{bmatrix} :\ z,t \in \mathbb{R}\right\}$ oraz $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1,3,3)$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1,1,-3)$.

Zadanie 4. W zależności od parametru p wyznacz $\ker f$ i jego bazę, gdzie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest odwzorowaniem liniowym takim, że $f(x,y,z) = (x - 3y + 2z, 2x - pz, (p+1)x + 2y - z)$. Na tej podstawie wywnioskuj dla jakich wartości parametru p odwzorowanie f jest mono- lub epimorfizmem.

Zadanie 5. Niech $f\colon\ \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ takie, że:

$$(f(p))(x) = -\frac{(x+1)^2}{2}p''(x) + (x+1)p'(x).$$

Wykaż, że f jest liniowe oraz $f \circ f = f$. Znajdź $\ker f$, $\operatorname{im} f$, ich bazy i wymiary. Sprawdź, czy $\mathbb{R}[x]_2 = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.