Zadanie 1. Sprawdź czy podane odwzorowania są liniowe. Dla tych odwzorowań, które są liniowe, wyznacz $\ker f$, $\operatorname{im} f$, ich bazy i wymiary.

a) $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\quad f(x,y,z,t) = (2x+y, 2z+2t, x-y+2z+t, y-x+t);$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\quad f(x,y) = (x-y, 2-x+y, 2x-y^2);$

c) $f\colon\ \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ f(p) = \begin{bmatrix} p(1)\text{-}p'(0) & p'(2)\text{-}2p(1) \\ p'(1)\text{-}p(\text{-}1) & p(1)+p(\text{-}1) \end{bmatrix};$

d) $f_9\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\quad f_9(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3, \ldots, x_1+\ldots+x_n);$

e) $f_{10}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\quad f_{10}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (x_1-x_2, x_3-x_4, x_5-x_6, \ldots, x_{n-1}-x_n).$

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru k odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ określone wzorem $f(x,y,z,t) = (x-y+(k+1)z, 2kx+5y-3t, x+ky-z-t)$ jest epimorfizmem, a dla jakich monomorfizmem?

Zadanie 3. Niech $B_1 = (e_1,\ldots,e_n)$ i $B_2 = (l_1,\ldots,l_n)$ będą dwiema bazami w $\mathbb{R}^n$ oraz $u = x_1e_1+\ldots+x_ne_n$. Udowodnij, że odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że:

$$f(u) = x_1l_1+\ldots+x_nl_n$$

jest izomorfizmem.

Zadanie 4. Wykaż, że zbiór macierzy $H = \left\{ \begin{bmatrix} -a & b \\ c & a \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Znajdź wymiar i bazę B_1 tej podprzestrzeni. Wykaż, że odwzorowanie $f\colon H \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$ takie, że:

$$f\left(\begin{bmatrix} -a & b \\ c & a \end{bmatrix} \right) = a - ib$$

jest liniowe. Znajdź $\ker f$, $\operatorname{im} f$, ich bazy i wymiary. Czy f jest monomorfizmem lub epimorfizmem? Ponadto znajdź $M_f(B_1,B_2)$, gdzie B_2 jest dowolnie wybraną bazą w $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Zadanie 5. Skonstruuj (podaj przepis) endomorfizm $f\colon\ \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ tak, aby:

$$\ker f = \operatorname{lin}\{1-x\} \text{ oraz } \operatorname{im} f = \operatorname{lin}\left\{1+x, 1+x^2\right\}.$$

Dla skonstruowanego odwzorowania znajdź jego macierz A w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$. Wykorzystując A oblicz $f(x^2-3x)$ oraz przeciwobraz $f^{-1}\left(\{1+x^2\}\right)$.