Algebra – zestaw nr 1

Zadanie 1 Udowodnić równości:

a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, b) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, c) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$,

e) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, f) $z\cdot\overline{z}=|z|^2$, w przykładach d) i e) zakładamy, że $z_2\neq 0$.

Zadanie 2 Wyznaczyć wartości:

a) $\mathrm{Im}[(2-i)(2+i)-(3-2i)^2]$ b) $\mathrm{Re}\left[\frac{(-i)^3+(-i+1)\cdot 2i}{1-i}\right]$ c) $\overline{\frac{5-3i}{(-1+2i)^2\overline{(3-i)}^2}}$

d) $\mathrm{Re}[(1-2i)^3-i^5]$ e) $|(-i+2)^2+3i\cdot(1+i)|$ f) $\mathrm{Im}\left[\overline{\frac{2-i}{(2-5i)^2}}\right]$

Zadanie 3 Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby:

a) $\sqrt{3}-i$, b) $2i-2$, c) $-3-3\sqrt{3}i$, d) i^3+i^{-3},

e) $\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$, f) $-2(\cos\pi+i\sin\pi)$, g) $\overline{(\sqrt{3}-i)\cdot 2i}$, h) $\frac{(6-6i)}{\sqrt{2}i}$.

Zadanie 4 Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

a) $A=\{z\in\mathbb{C}:\quad 1<|z-4-i|\leqslant 4\}$,

b) $B=\left\{z\in\mathbb{C}:\quad \mathrm{Re}\,(iz-2)\leqslant 0 \quad\wedge\quad \frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$,

c) $C=\left\{z\in\mathbb{C}:\quad \frac{|z+2i|}{|z-2|}>\sqrt{2}\right\}$,

d) $D=\{z\in\mathbb{C}:\quad z\overline{z}+(3-2i)z+(3+2i)\overline{z}+1=0\}$,

e) $E=\left\{z\in\mathbb{C}:\quad \frac{\pi}{4}<\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$,

f) $F=\left\{z\in\mathbb{C}:\quad \frac{\pi}{6}\leqslant\arg\left(iz^3\right)<\frac{\pi}{3}\right\}$,

g) $G=\left\{z\in\mathbb{C}:\quad 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)>1\right\}$,

h) $H=\left\{z\in\mathbb{C}:\quad \arg\left(\frac{z^6}{2i}\right)=\pi\right\}$.

Zadanie 5 Rozwiązać równania, stosując postać algebraiczną lub wykładniczą liczby zespolonej:

a) $\frac{1+i}{z}=\frac{2-3i}{\overline{z}}$, b) $2z+(1+i)\overline{z}=3i$, c) $\overline{z+i}-z+i=0$, d) $\frac{7-2\sqrt{7}i}{|z|-z}=1$,

e) $z^7=\overline{z}$, f) $-\overline{z}^4=z^3$, g) $|z|+z=8+4i$, h) $z^2|z|^2\overline{z}^2=32iz$.

Zadanie 6 Obliczyć:

a) $(4+4i)^{100}$, b) $(2\sqrt{3}-2i)^9$, c) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}$, d) $(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})^8$,

e) $(\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6})^{12}$, f) $(\frac{(6-6i)}{\sqrt{2}i})^{50}$, g) $\sqrt{7-24i}$, h) $\sqrt[4]{-4}$,

i) $\sqrt[5]{32i}$, j) $\sqrt[4]{i}$, k) $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}}$, l) $\sqrt[3]{2+2i}$,

Zadanie 7 Rozwiązać równania:

a) $z^6-7z^3-8=0$,

b) $z^6=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{-1+i}\right)^{12}$,

c) $z^2-(2+i)z-1+7i=0$,

d) $z^4-iz^2-(1+i)=0$,

e) $\left[z^6-(1-i)^6\right]\cdot\left[iz^2+(3+2i)z+1-5i\right]=0$,

f) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)+1=0$.

Zadanie 8

Rozważmy wielomian $w(z)=z^6+z^4-z^2-1$, $z\in\mathbb{C}$. Czy liczba i jest pierwiastkiem tego wielomianu? Jeśli tak, jaka jest krotność tego pierwiastka?

Zadanie 9

Wiedząc, że $z_1=1+i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(z)=az^3+bz+1$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$, znaleźć współczynniki a,b oraz pozostałe pierwiastki.

Zadanie 10

Znaleźć liczbę z_0^{15}, gdy z_0 jest pierwiastkiem równania $|z|-z=1+i\sqrt{3}$.