

Całki podwójne. Zastosowania.

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Zmień porządek całkowania w całce:

(a) $\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx dy$

(b) $\int_{-7}^1 \int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x, y) dx dy$

2. Oblicz $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdzie:

(a) $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$, D - prostokąt o wierzchołkach $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(1, 2)$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$, D - prostokąt o wierzchołkach $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$

(c) $f(x, y) = 5x^2 - 2xy$, D - trójkąt ograniczony osiami układu i prostą o równaniu $x + 2y = 2$

(d) $f(x, y) = \frac{x^2}{1+y^2}$, D - prostokąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

3. Znajdź wartość średnią funkcji $f(x, y) = 12 - 2x - 3y$ w obszarze ograniczonym prostymi $12 - x - 3y = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

4. Znajdź wartość średnią funkcji $f(x, y) = 4x - 5y + 12$ w obszarze ograniczonym prostymi $x - 2y + 2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

5. Oblicz:

(a) $\iint_D (x + y) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym wykresami funkcji $xy = 6$, $x + y = 7$,

(b) $\iint_D (x + y) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $x = y^2$, $x = \frac{y^2}{2} + 1$,

- (c) $\iint_D (x+y) dx dy$, gdzie $D : 0 \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq 2$,
- (d) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, gdzie $D : x^2 + y^2 - 2y \leq 0$,
- (e) $\iint_D x^2 y dx dy$, gdzie $D : x^2 + y^2 \leq 9$,
- (f) $\iint_D |\cos(x+y)| dx dy$, gdzie $D : [0, \pi] \times [0, \pi]$,
- (g) $\iint_D \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^2}$, gdzie $D : x^2 + y^2 \leq x, x^2 + y^2 \leq y$,
- (h) $\iint_D xy dx dy$, gdzie $D : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$,
- (i) $\iint_D xy dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym wykresami funkcji $y = \sqrt{x}, y = -x + 6$ oraz osią OX .

6. Oblicz za pomocą całki podwójnej:

- (a) pole obszaru $D : x \leq y \leq x+2, 2 \leq x \leq 3$,
- (b) pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = e^x, y = \ln x, x+y = 1, x = 2$,
- (c) pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = 0, y = -x^2 + x + 2$,
- (d) pole obszaru ograniczonego krzywymi $y^2 = 4x, x+y = 3$, gdzie $y \geq 0$,
- (e) pole obszaru ograniczonego krzywymi $xy = 1, x+y = \frac{5}{2}$,
- (f) pole figury ograniczonej lemniskatą tj. krzywą $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$,
- (g) pole elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
- (h) pole figury ograniczonej krzywymi $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y = x, y = 0$.

7. Oblicz objętość (za pomocą całki podwójnej):

- (a) bryły ograniczonej powierzchniami $z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, z > 0$
- (b) bryły ograniczonej powierzchniami $x = 0, x = 1 - |y|, z = 0, z = 10 = 5x - 2y$,
- (c) bryły ograniczonej paraboloidą $z = x^2 + y^2$ oraz płaszczyznami $x+y = 4, x = 0, z = 0$
- (d) bryły ograniczonej płaszczyzną $z = 0$ oraz powierzchnią $V : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$

- (e) kuli o promieniu R
 - (f) bryły ograniczonej płaszczyzną XOY , powierzchnią $x^2 + z^2 = 4$, $z > 0$ i płaszczyznami $y = 0$, $y = 1$
 - (g) bryły ograniczonej walcem $x^2 + y^2 = a^2$ i powierzchnią $z = x^2 + y^2$
 - (h) bryły wyciętej walcem $x^2 + y^2 = Rx$ z kuli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (tzw. bryła Vivaniego)
 - (i) elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.
8. Obszar D ograniczony jest krzywymi $x = 3$, $x + y = 3$, $y^2 = 4x$. Oblicz objętość bryły walcowej, której podstawą jest D , tworzące są prostopadłe do płaszczyzny XOY , a bryła jest ścięta płaszczyzną $x + y - z = 0$.
9. Oblicz masę obszaru:
- (a) $D : [0, 4] \times [0, 4]$, którego gęstość w punkcie P jest kwadratem odległości tego punktu od środka układu współrzędnych,
 - (b) $D : 2y^2 \leq x \leq 3 + y^2$, którego gęstość dana jest funkcją $\rho(x, y) = |y|$