

Szeregi liczbowe.

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Znajdź n -te sumy częściowe oraz sumy szeregów:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n}{6^n}$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 2^n}{9^n}$

2. Stosując kryterium porównawcze zbadaj zbieżność szeregów:

- (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^n}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{n+1})^2}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n+n^3}$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$
- (g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

3. Zbadaj zbieżność szeregów stosując kryterium D'Alemberta lub kryterium Cauchy'ego:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000^n}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^{2n^2}}{3^n}$
- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$
- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$
- (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

4. Stosując kryterium całkowite zbadaj zbieżność szeregów:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n \ln n}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+9}$

5. Zbadaj zbieżność szeregów:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{5}\right)^n$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \left(2 + \frac{1}{n}\right)$
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$
- (h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$

6. Zbadaj bezwzględną i warunkową zbieżność szeregów:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{3^n}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{2} - 1)$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

7. Zbadaj zbieżność szeregów w zależności od x :

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-6n-7} x^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, gdzie $x \neq 1, -1$