

Liczby zespolone

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Sprawdź równości:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$

(c) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

(d) $z \bar{z} = |z|^2$.

2. Oblicz:

(a) $(3 - 2i)(1 - 4i)$

(b) $\frac{2}{1-i}$

(c) $\frac{(i+\sqrt{3})(1-i)}{i-\sqrt{3}}$

(d) $\operatorname{im}\left(\frac{2}{(2-5i)^2}\right)$

(e) $|1 + 5i|$.

3. Znajdź część rzeczywistą i urojoną liczby

(a) $\frac{(2+i)(1-i)}{2i-1}$

(b) $\frac{3i}{(1+i)(1-2i)}$.

4. Przedstaw w postaci trygonometrycznej:

(a) $3, -4, -5i$

(b) $1 + i, -3 - i3\sqrt{3}, \sqrt{3} - i, -1 + \sqrt{3}i$

(c) $-2(\cos \pi + i \sin \pi), \cos \pi/3 - i \sin \pi/3, -2(\cos \pi - i \sin \pi)$

(d) $3(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}), -3(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}), 3(-\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})$

(e) $-2(\cos \frac{7\pi}{8} - i \sin \frac{7\pi}{8}), 2(-\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8})$

(f) $-\cos \frac{14\pi}{5} + i \sin \frac{14\pi}{5}, \cos \frac{14\pi}{5} - i \sin \frac{14\pi}{5}$.

5. Na płaszczyźnie zespolonej przedstaw geometrycznie zbiory:

- (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 4 - i| \leq 4\}$
- (b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{re}(iz + 4) \geq 0\}$
- (c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \frac{|z+3|}{|z-2i|} \geq 1\}$
- (d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{re} z < 3 + 5\operatorname{im} z\}$
- (e) $E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im} z^2 < 0\}$
- (f) $F = \{z \in \mathbb{C} : \frac{9}{\bar{z}} = z\}$.
- (g) $G = \{z \in \mathbb{C} ; \arg(\frac{z+1}{1-z}) = \frac{\pi}{2}\}$
- (h) $H = \{z \in \mathbb{C} ; 0 < \arg(iz) \leq \frac{\pi}{4}\}$
- (i) $I = \{z \in \mathbb{C} ; \frac{\pi}{4} \leq \arg \frac{i}{z} \leq \frac{3\pi}{4}, |-z - 3 + i| < 5\}$
- (j) $J = \{z \in \mathbb{C} ; 2\operatorname{re}(\frac{1}{z}) > 1\}$
- (k) $K = \{z \in \mathbb{C} ; \frac{\pi}{6} < \arg(iz) \leq \frac{\pi}{3}\}$

6. Oblicz:

- (a) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20}$,
- (b) $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

7. Na płaszczyźnie zespolonej przedstaw geometrycznie zbiory:

- (a) $A = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{re}(z^4) > 0\}$.
- (b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z^4) = \frac{3\pi}{2}\}$
- (c) $C = \{z \in \mathbb{C} ; \arg(z^6) = \pi\}$
- (d) $D = \{z \in \mathbb{C} ; \arg(z^3) \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]\}$
- (e) $E = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z^5) \in [0, \pi]\}$.

8. Oblicz i narysuj na płaszczyźnie zespolonej:

- (a) $\sqrt[4]{16}$
- (b) $\sqrt[3]{-8i}$.

9. Oblicz:

- (a) $\sqrt{3-4i}$
- (b) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$

(c) $\sqrt{-8-6i}$

(d) $\sqrt[3]{(3+4i)^6}$.

10. Rozwiąż używając postaci algebraicznej bądź wykładniczej równania:

(a) $\frac{1-i}{\bar{z}} = \frac{2+3i}{z}$

(b) $z^7 = \bar{z}$

(c) $\overline{z-i} + z + i = 0$

(d) $z + |z| = 8 + 4i$.

11. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równania:

(a) $z^2 - 3iz + 4 = 0$

(b) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$

(c) $\bar{z} = z^2$

(d) $z^4 + 16 = 0$

(e) $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$

(f) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \frac{z-i}{z+i} + 1 = 0$

(g) $z^2 - (2+i)z + (-1+7i) = 0$

(h) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 - 3\left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 3 + i = 0$.