

Algebra – zestaw nr 1**Zadanie 1** Udowodnić równości:

- a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, d) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$,
 e) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, f) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, w przykładach d) i e) zakładamy, że $z_2 \neq 0$.

Zadanie 2 Wyznaczyć wartości:

- a) $\operatorname{Im}[(2-i)(2+i) - (3-2i)^2]$ b) $\operatorname{Re} \left[\frac{(-i)^3 + (-i+1) \cdot 2i}{1-i} \right]$ c) $\frac{\overline{5-3i}}{(-1+2i)^2(3-i)^2}$
 d) $\operatorname{Re}[(1-2i)^3 - i^5]$ e) $|(-i+2)^2 + 3i \cdot (1+i)|$ f) $\operatorname{Im} \left[\frac{2-i}{(2-3i)^2} \right]$

Zadanie 3 Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby:

- a) $\sqrt{3} - i$, b) $\frac{(6-6i)}{\sqrt{2i}}$, c) $-2(\cos \pi + i \sin \pi)$, d) $-3 - 3\sqrt{3}i$,
 e) $\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$, f) $\overline{(\sqrt{3} - i) \cdot 2i}$, g) $i \sin \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7}$, h) $\sin \frac{5}{7}\pi - i \cos \frac{5}{7}\pi$.

Zadanie 4 Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

- a) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 4 - i| \leq 4\}$,
 b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz - 2) \leq 0 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$,
 c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-i}{z^2+1} \right| > \frac{1}{3} \quad \wedge \quad \frac{\pi}{6} \leq \arg(z+3i) \leq \frac{\pi}{3}\}$,
 d) $D = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} + (3-2i)z + (3+2i)\bar{z} + 1 = 0\}$,
 e) $E = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} \leq \arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) < \frac{\pi}{2}\}$,
 f) $F = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} < \arg(iz^3) \leq \frac{\pi}{3}\}$,
 g) $G = \{z \in \mathbb{C} : 2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1\}$,
 h) $H = \left\{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\frac{z^6}{2i}\right) = \pi\right\}$.

Zadanie 5 Rozwiązać równania, stosując postać algebraiczną lub wykładniczą liczby zespolonej:

- a) $\frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{\bar{z}}$, b) $2z + (1+i)\bar{z} = 3i$, c) $\overline{z+i} - z + i = 0$, d) $\frac{7-2\sqrt{7}i}{|z|-z} = 1$,
 e) $z^7 = \bar{z}$, f) $-\bar{z}^4 = z^3$, g) $|z| + z = 8 + 4i$, h) $z^2|z|^2\bar{z}^2 = 32iz$.

Zadanie 6 Obliczyć:

- a) $(4 + 4i)^{100}$, b) $(2\sqrt{3} - 2i)^9$, c) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}$, d) $(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})^8$,
- e) $(\sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6})^{12}$, f) $(\frac{6-6i}{\sqrt{2}i})^{50}$, g) $\sqrt{-11 + 60i}$, h) $\sqrt[4]{-4}$,
- i) $\sqrt[5]{32i}$, j) $\sqrt[4]{i}$, k) $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}}$, l) $\sqrt[3]{2 + 2i}$,

Zadanie 7 Rozwiązać równania:

- a) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$,
- b) $z^6 = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{-1+i}\right)^{12}$,
- c) $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0$,
- d) $z^4 - iz^2 - (1 + i) = 0$,
- e) $[z^6 - (1 - i)^6] \cdot [iz^2 + (3 + 2i)z + 1 - 5i] = 0$,
- f) $[z^5 - (1 + i)^2] \cdot [z^2 + (i - 4)z + 5(1 - i)] = 0$,
- g) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$.

Zadanie 8

Rozważmy wielomian $w(z) = z^6 + z^4 - z^2 - 1$, $z \in \mathbb{C}$. Czy liczba i jest pierwiastkiem tego wielomianu? Jeśli tak, jaka jest krotność tego pierwiastka?

Zadanie 9

Wiedząc, że $z_1 = 1 + i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(z) = az^3 + bz + 1$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, znaleźć współczynniki a, b oraz pozostałe pierwiastki.

Zadanie 10

Znaleźć liczbę z_0^{15} , gdy z_0 jest pierwiastkiem równania $|z| - z = 1 + i\sqrt{3}$.

Zadanie 11

- a) Wyznaczyć postać algebraiczną liczby zespolonej $z_0 = \frac{(-1+\sqrt{3}i)^{21}}{(i-1)^{36}}$.
- b) Wiedząc, że liczba z_0 z podpunktu a) jest pierwiastkiem wielomianu

$$w(z) = -z^3 + (i - 5)z^2 + (20 + 5i)z - 32 - 24i$$

wyznaczyć pozostałe pierwiastki tego wielomianu w dziedzinie zespolonej.