1) Macierzą odwzorowania $f\colon U \to V$ w bazach $B_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $B_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ nazywamy macierz

$$M_f(B_1, B_2) := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

której i-tą kolumnę stanowią współrzędne obrazu wektora u_i względem bazy B_2, a zatem:

$$f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m$$

$$f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{m2}v_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(u_n) = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots + a_{mn}v_m.$$

2) Odwzorowanie jest odwracalne jeżeli jest izomorfizmem. Wówczas

$$M_{f^{-1}}(B_2, B_1) = \left(M_f(B_1, B_2)\right)^{-1}.$$

Wynika stąd, że aby sprawdzić, czy odwzorowanie liniowe jest izomorfizmem wystarczy wyznaczyć macierz A odwzorowania f w dowolnych bazach i sprawdzić, czy $\det A \neq 0$.

Zadanie 1. Znajdź macierze następujących odwzorowań liniowych w podanych bazach:

a) $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$, $(f(p))(x) = (x-1)\cdot p(x) + x^2 \cdot p'(x-1)$,

$B_1 = (x^2+2x, 3x-1, x-5)$, $B_2 = (x^3+x, x^3-x, x^2+1, x^2-1)$;

b) $f\colon \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[x]_2$, $\left(f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\right)(x) = (2a+b-d)x^2+(a-b-c+d)x+a+2b-c-3d$,

$B_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$, $B_2 = (x^2-3x+2, x^2-x+1, 2x^2-x+1)$,

c) $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $f(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} a+2b+c & a+b+c \\ -2a+b+c & a-c \end{bmatrix}$,

$B_1 = (x^2-3x+2,\ x^2-x+1, 2x^2-x+1)$, $B_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$.

Zadanie 2. Niech $U = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 2}\colon 5a-b-c=0,\ a-2b+c+d=0\right\}$ oraz $V = \operatorname{lin}\{x^3+x^2+1, 2x^3+x^2-x+1, x^2+2x+3\}$. Wykaż, że odwzorowanie $f\colon U \to V$ określone wzorem:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)(x) = (-b+c)x^3+(-2a+2b-c-d)x^2+(-2b+c+2d)x-3a+2b$$

jest liniowe. Wyznacz macierz tego odwzorowania w dowolnych bazach przestrzeni U oraz V. Korzystając z tej macierzy znajdź $\ker f$ oraz $\operatorname{Im} f$, a także ich bazy i wymiary.

Zadanie 3. Sprawdź, czy podane odwzorowania liniowe są odwracalne. Jeżeli tak to znajdź odwzorowania odwrotne f^{-1}.

a) $f\colon \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$, $\quad (f(w))(x) = (x^2-x+1)w''(x)+(x+2)w'(x)$;

b) $f\colon \mathbf{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$, $\quad f(A) = (2a_{11}-a_{22}, a_{21}-3a_{11}, a_{22}+a_{21}-a_{12}-2a_{11}, -a_{21}+2a_{12}-a_{22})$.

c) $f\colon \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\quad f(ax^3+bx^2+cx+d) = \begin{bmatrix} a+b-c & 2b+c+3d \\ -b+c-d & a+2b+c+d \end{bmatrix}$,

d) $f\colon \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$, $\quad f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \big(a+b-c+(2b+c+3d)i, -b+c-d+(a+2b+c+d)i\big)$.

Zadanie 4. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ odwzorowania $f\colon \mathbb{R}[x]_4 \longrightarrow \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ w bazach kanonicznych. Wyznacz $\ker f$, $\operatorname{im} f$, ich bazy i wymiary. Na tej podstawie określ, czy odwzorowanie f jest mono- lub epimorfizmem.