Zadanie 1. Znajdź macierze następujących odwzorowań liniowych w podanych bazach:

a) $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_1$, $(f(p))(x) = (3-x)p''(x)+4p'(x)$ w wybranych niestandardowych bazach przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ i $\mathbb{R}[x]_1$;

b) $f\colon \mathbf{M}_{2\times 2} \to \mathbf{M}_{2\times 2}$, $\quad f(A) = A^T - A$,
$B_1 = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$,
E_i – wektory bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbf{M}_{2\times 2}$,

Zadanie 2. Sprawdź, czy podane odwzorowania liniowe są odwracalne. Jeżeli tak to znajdź odwzorowania odwrotne f^{-1}.

a) $f\colon \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$, $\quad (f(p))(x) = xp'(x+1) - p(x+1)$;

b) $f\colon \mathbf{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbf{M}_{2\times 2}$, $\quad f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & a-c-d \\ a+b+c & b+2c+d \end{bmatrix}$;

c) $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_2$, $\quad f\left(ax^2+bx+c\right) = (2b+c-a)x^2 + (c+a-b)x + c + b - 2a$.

Zadanie 3. Zbadaj, czy odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ takie, że:

$$\left(f\left(ax^2+bx+c\right)\right) = (2a-b+c)x^2 + (a+c)x + b + 2c$$

jest automorfizmem. Jeżeli tak, to znajdź odwzorowanie odwrotne f^{-1}.

Zadanie 4.

a) Rozwiąż układ równań w zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (k-1)x + y + kz = 1 \\ kx + y - z = 1 \\ 2x - y + z = k \end{cases}.$$

b) Dla jakich wartości parametru k odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że:

$$f(x,y,z) = ((k-1)x + y + kz, kx + y - z, 2x - y + z)$$

jest odwracalne? Dla tych wartości k wyznacz $f^{-1}(1,1,k)$.

Zadanie 5. Obrazami wielomianów $w_1(x) = x^2+1$, $w_2(x) = x+1$, $w_3(x) = x^2+x$ w odwzorowaniu liniowym $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ są odpowiednio wielomiany: $u_1(x) = x^2+3x+2$, $u_2(x) = 2x^2+2x$, $u_3(x) = 2x^2+2x+2$. Znajdź macierz f^{-1} w bazie $B = (w_1, w_2, w_3)$.

Zadanie 6. Dane są dwie podprzestrzenie wektorowe $V = \operatorname{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right\}$ oraz $W = \operatorname{lin}\left\{x^3+2x-1, -x^3+x^2+x+1, 2x^3-x^2+1\right\}$. Uzasadnij, że są to przestrzenie izomorficzne. *Wskazówka:* zdefiniuj odwzorowanie przekształcające bazę V na bazę W.