Algebra – zestaw nr 2

Zadanie 1 Niech będą dane macierze:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Obliczyć:

a) $C^T A + 3AB^T$, b) $2BA^T - (CA)^T$, c) $B^2 - A^T CA$, d) $A^T C^2 + BA^T$.

Zadanie 2 Rozwiązać równania macierzowe:

a) $$\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - 2X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} + X$$

c) $$2X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3 Obliczyć wyznaczniki macierzy stosując metodę Sarrusa:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4 Wiedząc, że $\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = -3$, obliczyć wartość $\begin{vmatrix} \frac{1}{3}b - a & \frac{1}{3}y - x & \frac{1}{3}q - p \\ a + 2c & x + 2z & p + 2r \\ -c & -z & -r \end{vmatrix}$.

Zadanie 5 Wyznaczyć macierze dopełnień algebraicznych dla poniższych macierzy, a następnie obliczyć ich wyznaczniki korzystając z tw. Laplace'a:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 6 Doprowadzić do postaci schodkowej i wyznaczyć rzędy macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 7 \\ -4 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7 Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 8

Niech będzie dana macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 1 & -8 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. Wiadomo też, że $\det(2B) = 32$ oraz $\det(3B) = 162$. Obliczyć wartość wyrażenia $(\operatorname{rz} A)^2 + (\det B)^2$.

Zadanie 9 W zależności od parametru p wyznaczyć rzędy macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & p & 3 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & p-4 & 6 & 3 \\ 1 & p-2 & p+1 & 1 \\ -1 & 1 & p-3 & -1 \\ -1 & 2-p & -2 & p-3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 10 Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n, jeżeli:

a) $A^2 = A^T$, b) $A^T - A^{-1} = \bar{0}$, c) $A^2 + A^{-1} = \bar{0}$.