

Całki potrójne. Zastosowania.

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Oblicz:

- (a) $\iiint_V \frac{x}{yz} dx dy dz$, gdzie $V : [1, 2] \times [1, e] \times [1, e]$,
- (b) $\iiint_V \sin x \sin(x+y) \sin(x+y+z) dx dy dz$, gdzie $V : [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$,
- (c) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{x+y+z+1}$, gdzie $V : [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$,
- (d) $\iiint_V (e^x + \frac{1}{y} + \frac{1}{z^2}) dx dy dz$, gdzie $V = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3, -3 \leq z \leq -1\}$.

2. Zamień na całkę iterowaną $\iiint_V (x+y+z) dx dy dz$, gdzie V jest bryłą ograniczoną powierzchniami:

- (a) $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 3$,
- (b) $x^2 + y^2 = 3, z = -1, z = 2$.

3. Zamień na całkę iterowaną $\iiint_V xyz dx dy dz$, gdzie V jest bryłą ograniczoną powierzchniami:

- (a) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 6$,
- (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, gdzie $z \geq 4$.

4. Oblicz

- (a) $\iiint_V x^2 dx dy dz$, gdzie $V : 0 \leq y \leq 9 - x^2 - z^2$,
- (b) $\iiint_V z^2 dx dy dz$, gdzie $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, R > 0$.

5. Oblicz $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, gdzie:

- (a) $f(x, y, z) = z$, gdzie V - bryła ograniczona górną półkulą $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$,

- (b) $f(x, y, z) = x$, gdzie V - bryła ograniczona powierzchniami $x^2 + y^2 = -2z + 9$, $z = 0$, gdzie $x \geq 0$, $y \geq 0$,
- (c) $f(x, y, z) = \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, gdzie $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$,
- (d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, gdzie V - bryła ograniczona powierzchniami $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$, $z = 0$,
- (e) $f(x, y, z) = z$, V - bryła ograniczona powierzchniami XOY , $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, gdzie $z > 0$.

6. Oblicz objętość (za pomocą całki potrójnej):

- (a) bryły ograniczonej powierzchniami $x = -1$, $x = 2$, $z = 4 - y^2$, $z = 2 + y^2$
- (b) bryły ograniczonej od góry paraboloidą $4z = 16 - x^2 - y^2$, od dołu płaszczyzną $x + y + z = 4$, a z boku płaszczyzną $x + y = 4$ i płaszczyznami $x = 0$ i $y = 0$
- (c) bryły ograniczonej dwiema paraboloidami $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, płaszczyzną $y = x$ i walcem $y = x^2$
- (d) bryły zawartej pomiędzy powierzchniami $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 0$, $z = 4$.
- (e) bryły ograniczonej powierzchnią $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$, $a > 0$
- (f) bryły wyciętej walcem $x^2 + y^2 = Rx$ z kuli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (tzw. bryła Vivaniego).

7. Oblicz masę:

- (a) wspólnych części kul $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ i $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8z$, jeżeli gęstość w punkcie (x, y, z) jest równa odległości tego punktu od płaszczyzny XY ,
- (b) bryły $V = \{(x, y, z) : r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ wiedząc, że gęstość w punkcie P jest równa odległości tego punktu od płaszczyzny XY ,
- (c) bryły ograniczonej powierzchniami $z = 2 - x^2 - y^2$ oraz $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ wiedząc, że gęstość w punkcie (x, y, z) jest równa kwadratowi odległości tego punktu od osi OZ .