Ciągi i szeregi funkcyjne.

---

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Wyznacz obszary zbieżności i znajdź granicę ciągu funkcyjnego:

   (a) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x}$ dla $x \in [1, \infty)$

   (b) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ dla $x > 1$

   (c) $f_n(x) = \frac{2n+2x}{3n^2x^2}$ dla $x \in [1, 5]$

   (d) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ dla $x \in [0, 1]$

   (e) $f_n(x) = x^n$.

   * Na jakich obszarach zbieżność jest jednostajna?

2. Dla jakich wartości argumentu x szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(x+1)n+1}$$

   jest rozbieżny, a dla jakich zbieżny do 0?

3. Znajdź obszar zbieżności szeregu funkcyjnego:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)x^n$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3x}{2^n}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$

4. Zbadaj zbieżność szeregów stosując kryterium Weierstrassa:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$, $x \in R$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $x \in [0, \infty)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$, $x \in R$

5. Znajdź promień, przedział i obszar zbieżności szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^{2n-1} x^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{en!} x^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} x^{2n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^n$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} (x+2)^n$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)1}{(n!)^3} (x-1)^n$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3^n} x^{2n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n(n+1)} (x-1)^{2n}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n n^{10}$.

6. Znajdź obszar zbieżności oraz sumy szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n(1-x)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} x^n}{n4^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+3}{5^n} x^{2n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+1}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} 5nx^n$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} x^{2n}$.

7. Oblicz sumy szeregów liczbowych korzystając ze zbieżności odpowiednich szeregów potęgowych:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{4^n}$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)5^n}$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

8. Rozwiń w szereg Taylora o środku w punkcie x_0 funkcję f:

   (a) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$
   (b) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$
   (c) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$
   (d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$
   (e) $f(x) = \frac{1}{2+3x}$, $x_0 = 0$
   (f) $f(x) = \frac{1}{2+3x}$, $x_0 = 3$
   (g) $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$, $x_0 = 0$
   (h) $f(x) = \frac{x+1}{(x+4)(x-3)}$, $x_0 = 0$
   (i) $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$, $x_0 = 2$
   (j) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.