1) Niech $B_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ oraz $B_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ będą bazami pewnej przestrzeni wektorowej V. Macierzą przejścia z bazy B_1 (zwanej "starą") do bazy B_2 (zwanej "nową") nazywamy macierz

$$P_{B_1 \to B_2} := M_{id}(B_2, B_1) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

której i-tą kolumnę stanowią współrzędne wektora v_i z bazy B_2 względem bazy B_1, a zatem:

$$v_1 = p_{11}u_1 + p_{21}u_2 + \ldots + p_{n1}u_n$$

$$v_2 = p_{12}u_1 + p_{22}u_2 + \ldots + p_{n2}u_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_n = p_{n1}u_1 + p_{n2}u_2 + \ldots + p_{nn}u_n.$$

Macierz przejścia jest macierzą nieosobliwą, a ponadto prawdziwe są zależności

$$P_{B_2 \to B_1} = (P_{B_1 \to B_2})^{-1} \quad \text{oraz} \quad [w]_{B_1} = P_{B_1 \to B_2} \cdot [w]_{B_2}.$$

2) Niech $f\colon U \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym, B_U, B'_U - pewnymi bazami przestrzeni U, natomiast B_V i B'_V bazami przestrzeni V. Jeżeli znamy macierz $M_f(B_U, B_V)$, to aby obliczyć macierz tego odwzorowania w bazach B'_U i B'_V można skorzystać ze wzoru:

$$M_f(B'_U, B'_V) = P_{B'_V \to B_V} \cdot M_f(B_U, B_V) \cdot P_{B_U \to B'_U}. \tag{1}$$

Analogiczny wzór można zapisać dla endomorfizmu $f\colon V \to V$ i baz B_1, B_2 przestrzeni V:

$$M_f(B_2) = P_{B_2 \to B_1} \cdot M_f(B_1) \cdot P_{B_1 \to B_2}. \tag{2}$$

3) Niech $f\colon U \to V$ oraz $g\colon V \to W$ będą odwzorowaniami liniowymi. Ponadto niech B_U, B_V oraz B_W będą bazami odpowiednio U, V, W. Wówczas macierz złożenia odwzorowań $g \circ f$ można obliczyć ze wzoru:

$$M_{g \circ f}(B_U, B_W) = M_g(B_V, B_W) \cdot M_f(B_U, B_V). \tag{3}$$

Uwaga: ważne jest, aby baza w przestrzeni w której zachodzi składanie (czyli B_V) była ta sama dla obydwu macierzy.

Zadanie 1. Znajdź macierze przejścia z bazy B_1 do bazy B_2 w odpowiednich przestrzeniach wektorowych:

a) $B_1 = ((1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,1))$ oraz $B_2 = ((2,1,-4),(1,-2,4),(-1,3,-3))$;

b) $B_1 = (3x^2-x+2, x^2+x+1, 2x^2-x+1)$ oraz $B_2 = (-x^2+2x+3, x^2-x+1,\ 2x^2+x-2)$;

c) $B_1 = (2x^3-x^2-1, x^3+x^2+x+1, x^3+x^2+2x, x^2+x+1)$,
$B_2 = (x^3+x+1,\ x^2+x+1, x^3-x^2+1, -x^3+x^2-x)$;

d) $B_1 = ((1-i,2i);(i,1);(-1,1+i);(2+i,-i))$,
$B_2 = ((-2-3i,4i);(-4-i,1+2i);\ (-2+3i,3-i);(2+i,-2i))$.

Zadanie 2. Dana jest macierz przejścia $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ z bazy B_1 do danej bazy $B_2 = (u_1,u_2,u_3)$ w $\mathbb{R}^3$. Znajdź wektory bazy B_1 oraz współrzędne wektora $w = [2,2,2]_{B_1}$ względem bazy B_2.

Zadanie 3. Macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania liniowego $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w bazie $B = (v_1,v_2)$. Znajdź macierz A' odwzorowania f w bazie $B_1 = (3v_1+v_2, -5v_1-2v_2)$. Dwoma sposobami (korzystając z macierzy A i A') oblicz $f^{-1}(2v_1+5v_2)$.

Zadanie 4. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ odwzorowania liniowego $f\colon\ \mathbb{R}[x]_1 \to \mathbb{R}[x]_2$ w bazach $B_1 = (u_1,u_2)$ oraz $B_2 = (v_1,v_2,v_3)$. Znajdź macierz A' odwzorowania f w bazach $B_1' = (2u_1+u_2, -3u_1-u_2)$ oraz $B_2' = (-v_1+2v_2+v_3, v_2+v_3, v_1-v_2+v_3)$. Dwoma sposobami (korzystając z macierzy A i A') oblicz $f(u_1+u_2)$.

Zadanie 5. Odwzorowanie $f\colon\ \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ dane jest wzorem

$$(f(w))(x) = (x-2)w'(x) - w(x).$$

a) Wykaż, że f jest odwzorowaniem liniowym.

b) Wyznacz macierz A endomorfizmu f w bazie $B_1 = (1,x,x^2,x^3)$.

c) Znajdź jądro i obraz odwzorowania f, ich wymiary i bazy. Czy f jest monomorfizmem lub epimorfizmem? Odpowiedź uzasadnij.

d) Niech $B_2 = (-2, x+1, 3x^2-x, (x+1)^3)$. Uzasadnij, że B_2 jest bazą w $\mathbb{R}[x]_3$.

e) Korzystając z odpowiednich macierzy przejścia wyznacz macierz A' endomorfizmu f w bazie B_2.