Zadanie 1. Znajdź macierze przejścia z bazy B_1 do bazy B_2 w odpowiednich przestrzeniach wektorowych:

a) $B_1 = ((1,0,1,0),(2,-1,0,3),(-1,4,0,1),(1,1,-1,0))$ oraz $B_2 = ((-3,-2,-1,0),(1,1,2,4),(0,-1,3,1),(-1,1,0,2))$;

b) $B_1 = (-x^2+2x+2, x^2+1, 2x^2+x-1)$ oraz $B_2 = (4x^2-5, 2x+3, x^2+5x+4)$;

c) $B_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$ oraz $B_2 = (E_1, E_2, E_3, E_4)$, gdzie E_i to wektory bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

d) $B_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ oraz $B_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$.

Zadanie 2. Pewne odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma w bazach $B_1 = ((2,1),(3,1))$ oraz $B_2 = ((1,1),(0,1))$ macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Znajdź jego macierz w bazach:

$$B_1' = ((1,1),(3,2)) \text{ oraz } B_2' = ((2,1),(1,0)).$$

Zadanie 3. Pewne odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]_2$ ma w bazach $B_1 = (u_1, u_2)$ oraz $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$ macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Znajdź macierz A' odwzorowania f w bazach:

$$B_1' = (u_1 - u_2, 2u_1 - 3u_2) \text{ oraz } B_2' = (v_1 + v_2 - 2v_3, 2v_2 + v_3, v_1 + 2v_2 - v_3).$$

Dwoma sposobami (korzystając z macierzy A i A') oblicz $f(u_1 + 2u_2)$.

Zadanie 4. Niech $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_1$ w bazach $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ oraz $B_2 = (v_1, v_2)$. Znajdź macierz C' odwzorowania f w bazach:

$$B_1' = (2u_1 + u_2, -u_1 + u_3, u_1 + u_2 + 2u_3) \text{ oraz } B_2' = (2v_1 + 3v_2, 3v_1 + 4v_2).$$

Dwoma sposobami (korzystając z macierzy C i C') oblicz $f(u_1 + u_2 + u_3)$.

Zadanie 5. Niech $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazie $B = (u_1, u_2, u_3)$. Znajdź macierz D' odwzorowania f w bazie:

$$B' = (2u_1 + u_2 + 2u_3, -u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3).$$

Dwoma sposobami (korzystając z macierzy D i D') oblicz $f^{-1}(u_1 - u_2 + u_3)$.