

Całki krzywoliniowe nieskierowane

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Oblicz całkę krzywoliniową nieskierowaną:

- (a) $\int_{\Gamma} xy ds$, gdzie Γ jest częścią okręgu $x^2 + y^2 = 1$ leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych,
- (b) $\int_{\Gamma} xyz ds$, gdzie $\Gamma : x = t, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z = \frac{1}{2}t^2$,
- (c) $\int_{\Gamma} xy^2 ds$, jeżeli $\Gamma : x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
- (d) $\int_{\Gamma} \frac{x}{y} ds$, gdzie Γ jest łukiem paraboli $y^2 = 2x$ zawartym między punktami $(1, \sqrt{2}), (2, 2)$
- (e) $\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds$, gdzie $\Gamma : x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 4\pi$.

2. Oblicz długość łuku krzywej:

- (a) $y = \ln x, x \in [\sqrt{8}, \sqrt{15}]$,
- (b) $x(t) = 2 \cos t, y(t) = 2 \sin t, z(t) = t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$
- (c) $x = y^2$, gdzie $y \in [-1, 1]$
- (d) $x(t) = 3t, y(t) = 3t^2, z(t) = 2t^3$, gdzie $t \in [0, 1]$.

3. Oblicz masę łuku krzywej:

- (a) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, gdzie $0 \leq x \leq 1$, jeżeli gęstość w dowolnym punkcie na krzywej jest odwrotnie proporcjonalna do rzędnej punktu, a w punkcie $(0, 1)$ ma wartość 2,
- (b) $y = \ln x, 1 \leq x \leq e$, jeżeli gęstość w dowolnym punkcie równa się odciętej tego punktu,
- (c) będącej odcinkiem prostej przechodzącej przez punkty $A(0, 2), B(2, 4)$ o gęstości $f(x, y) = x^2 + y$,

- (d) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$, gdzie $0 \leq t \leq 1$, jeżeli gęstość jest odwrotnie proporcjonalna do długości promienia wodzącego, a w punkcie $(1, 0, 1)$ wynosi 3.