

Szeregi Fouriera.

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Sprawdź, czy ciąg funkcji $\{\Phi_n\} = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}$ w przedziale $[0, \pi]$ tworzy układ ortogonalny. Oblicz $||\Phi_n||^2$.
2. W przedziale $[-\pi, \pi]$ rozwiń w szereg Fouriera funkcję:

(a) $f(x) = \cos x$

(b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

(c) $f(x) = e^x$

(d) $f(x) = |x|$

(e) $f(x) = \frac{1}{2}x$

(f) $f(x) = \begin{cases} -(x - \pi)^2, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$.

Narysuj wykres sumy szeregu.

3. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję i narysuj wykres jego sumy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 3 \end{cases}.$$

4. W przedziale $[-\pi, \pi]$ rozwiń w szereg Fouriera funkcję:
a)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

Korzystając z tego rozwinięcia znajdź sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

5. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ i korzystając z tego rozwinięcia oblicz sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
6. Korzystając z rozwinięcia funkcji $f(x) = x^2$ oblicz:
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
7. Rozwiń w szereg sinusów funkcję $f(x) = x(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$. Następnie narysuj wykres sumy szeregu i oblicz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{6n-1}}{(2n-1)^3}$.
8. Rozwiń w szeregi sinusów i kosinusów funkcję:
- $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$
 - $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in [0, \pi]$
 - $f(x) = |1 - |x - 1||$, $x \in [0, 2]$
 - $f(x) = 1 - |x - 1|$, $x \in [0, \pi]$.
9. Funkcję $f(x) = 10 - x$ rozwiń w szereg Fouriera w przedziale $(5, 15)$.