Zadanie 1. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazach $B_1 = (v_1, v_2, v_3)$, $B_2 = (u_1, u_2, u_3)$, natomiast $C = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazach:

$$B_3 = (-v_1 + v_2, -2v_1 + 3v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3), B_4 = (2u_1 + 2u_2 + u_3, u_2 - u_3, 3u_1 + 3u_2 + u_3).$$

Wyznacz jedną z macierzy: $M_{f\circ g^{-1}}(B_4, B_4)$ lub $M_{g\circ f^{-1}}(B_2, B_2)$ oraz korzystając z obliczonej macierzy zapisz macierzowo odwzorowanie dla wybranego przypadku.

Zadanie 2. Macierz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ jest macierzą endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ w bazie $B_1 = (x^2 + x - 1, x - 1, -x^2 + x)$. Macierz $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania liniowego $g\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_1$ w bazach kanonicznych, odpowiednio $(x^2, x, 1)$, $(x, 1)$. Korzystając z macierzy A znajdź $f\,(x^2 + 2x - 2)$. Ponadto wyznacz przepis oraz macierz M odwzorowania $g \circ f^{-1}$ w bazach kanonicznych.

Zadanie 3. Niech $f\colon V \to V$ będzie endomorfizmem, a $B = (e_1, e_2, e_3)$, $B' = (e_1', e_2', e_3')$ bazami przestrzeni V nad ciałem K, gdzie:

$$f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3, \qquad f(e_2) = 2e_1 - e_3, \qquad f(e_3) = -e_1 + e_2$$

oraz

$$e_1 = e_2' + e_3', \qquad e_2 = e_1' - e_2' - e_3', \qquad e_3 = e_1' - e_3'.$$

Wyznacz macierz $A = M_f(B)$. Wykorzystując odpowiednie macierze przejścia, oblicz macierz $A' = M_f\,(B')$, a następnie wyznacz macierz $C = M_{f^2}\,(B')$. Wykorzystując macierz C oblicz $f(f(v))$, gdzie $v = e_1 - e_2 - e_3$. Znajdź jądro i obraz odwzorowania f, ich wymiary i bazy. Czy f jest monomorfizmem lub epimorfizmem? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Niech $A = M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $C = M_g(B_3, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ będą macierzami odwzorowań liniowych $f\colon U \to V$ oraz $g\colon V \to U$.

a) Znajdź $D = M_{f\circ g}(B_2, B_2)$, jeśli wiadomo, że $B_1 = (u_1, u_2)$, $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$, $B_3 = (w_1, w_2, w_3)$, gdzie $w_1 = 2v_2 + v_3$, $w_2 = -v_1$, $w_3 = -v_2 - v_3$.

b) Wykorzystując macierz D, oblicz $f(g(-2w_2 - w_3))$.

c) Wyznacz wymiary oraz bazy jądra i obrazu odwzorowania $f \circ g$.