

CAŁKA KRZYWOLINIOWA SKIEROWANA

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Oblicz całkę krzywoliniową skierowaną:

- (a) $\int_{\Gamma} (\cos y + y \cos x) dx + (\sin x - x \sin y + 2) dy$, gdzie Γ jest odcinkiem łączącym punkty $A(0, \frac{\pi}{4})$, $B(\frac{\pi}{2}, \pi)$,
- (b) $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + xy dy$, gdzie $\Gamma : x = t, y = e^t, t \in [0, 1]$,
- (c) $\int_{\Gamma} (x + y + 1)e^x - e^y dx + (e^x - (x + y + 1)e^y) dy$, gdzie $\Gamma : (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, o początku leżącym na osi odciętych i końcu w punkcie $(0, 0)$, zawarty w I ćwiartce układu,
- (d) $\int_{\Gamma} (y^2 - xy) dx + x dy$, gdzie Γ jest ujemnie zorientowanym łukiem $y = \sqrt{x}, x \in [0, 1]$,
- (e) $\int_{\Gamma} xy^2 dx - x^2 y dy$, gdzie Γ jest okręgiem $C((0, 0), 1)$,
- (f) $\int_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, gdzie $\Gamma : x^2 + y^2 = R^2$,
- (g) $\int_{\Gamma} xy dx$, gdzie Γ jest łukiem paraboli $y^2 = x$ łączący punkt $A(1, -1)$ z punktem $B(1, 1)$,
- (h) $\int_{\Gamma} (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A(2, 5)$, $B(1, 1)$, $C(3, 2)$,
- (i) $\int_{\Gamma} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$,
- (j) $\int_{\Gamma} (x - y) dx + (x + y) dy$, gdzie $\Gamma : x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, t \in [0, \pi]$ jest zorientowana ujemnie,
- (k) $\int_{\Gamma} \sqrt{xy} dx + x dy$, gdzie Γ jest ujemnie skierowanym łukiem paraboli $y = x^2$, gdzie $0 \leq x \leq 1$,
- (l) $\int_{\Gamma} (x + 2y) dx + (x - 2y) dy + z dz$, gdzie Γ jest prostą łamaną o wierzchołkach $A(0, 0, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(2, 2, 2)$.
- (m) $\int_{\Gamma} (x^2 - y^2) dx$, gdzie Γ - łuk paraboli $y = x^2$, gdzie $0 \leq x \leq 2$.

2. Oblicz pracę siły $\vec{F}$ potrzebną do przesunięcia punktu materialnego o masie jednostkowej wzdłuż łuku Γ , gdzie:
 - (a) $\vec{F} = [xz - z, 0, 2x + z^2]$, Γ - krzywa dana równaniem $z = x^3$ od punktu $A(0, 0, 0)$ do punktu $B(1, 1, 1)$,
 - (b) $\vec{F} = [z^2, 2yz, x^2 - y^2]$, Γ - krzywa dana równaniem $x = t^3$, $y = t^2$, $z = t$ od punktu $A(0, 0, 0)$ do punktu $B(1, 1, 1)$.
3. Oblicz (korzystając z twierdzenia Greena):
 - (a) $\int_{\Gamma} y(1 - x^2)dx + x(y^2 + 1)dy$, gdzie Γ - obwód trójkąta $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$,
 - (b) $\int_{\Gamma} x^2ydx + xy^2dy$, gdzie Γ - okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = R^2$,
 - (c) $\int_{\Gamma} 2(x + y)^2dx - (x^2 + y^2)dy$, gdzie Γ - obwód trójkąta o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 5)$,
 - (d) $\int_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, gdzie Γ - okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = Rx$.
4. Oblicz $\int_{\Gamma} xydx + x^2dy$, gdzie:
 - (a) Γ - odcinek prostej o początku $A(a, 0)$ i końcu $B(0, b)$,
 - (b) Γ - łuk elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ o początku $A(a, 0)$ i końcu $B(0, b)$.
5. Sprawdź, czy całka nie zależy od drogi całkowania, a następnie oblicz:
 - (a) $\int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$,
 - (b) $\int_{(1, 1)}^{(3, 1)} \frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$,
 - (c) $\int_{(0, 1)}^{(2, 3)} (4xy^3 - \frac{1}{y})dx + (6x^2y^2 + \frac{x}{y^2})dy$,
 - (d) $\int_{(a, a)}^{(b, b)} (3x^2 + y^2)dx + (2xy - y)dy$,
 - (e) $\int_{(0, 0)}^{(3, 1)} (2xy + \frac{y}{2\sqrt{x+1}})dx + (x^2 + \sqrt{x+1})dy$,
 - (f) $\int_{(0, 1)}^{(2, 3)} (2x + y^3)dx + (3xy^2 + 4)dy$.
6. Sprawdź, czy pole $\vec{F}$ jest polem potencjalnym oraz oblicz wskazane całki:

$$(a) \quad \vec{F} = [x, y], \oint_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy$$

$$(b) \quad \vec{F} = [x + y, x - y], \oint_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y)dx + (x - y)dy.$$

7. Oblicz całkę krzywoliniową skierowaną po dowolnym łuku o początku $A(0, 0, 1)$ i końcu $B(1, 2, 1)$ w polu potencjalnym $\vec{F} = [x + yz, y + xz, z + xy]$.

8. Sprawdź, że całka

$$\int_{\Gamma} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2)dy$$

nie zależy od kształtu krzywej Γ oraz oblicz ją w przypadku, gdy Γ jest okręgiem $(y - 4)^2 = 16 - (x + 3)^2$.