

Algebra – zestaw nr 4

Zadanie 1 Sprawdzić, czy następujące podzbiory odpowiedniej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami wektorowymi:

- a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 2z = 0\}$;
- b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -x - 3t = 0; \quad z + 2y = 0\}$;
- c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1 \quad \wedge \quad y + z = 1 \quad \wedge \quad x + z = 1\}$;
- d) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - 2 = 0; \quad t - 2z + 2 = 0\}$;
- e) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0\}$;
- f) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : |x| = |z|; \quad 3y - t = 0\}$.

Zadanie 2 Zbadać liniową niezależność wektorów:

- a) $u_1 = (1, -1, 2), u_2 = (3, 4, -1), u_3 = (2, 1, 0)$;
- b) $u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 2, -1)$;
- c) $u_1 = (1, 1, -1, 3), u_2 = (1, 4, 2, 0), u_3 = (1, 2, 0, 2)$;
- d) $u_1 = (2, 0, 0, -3), u_2 = (1, 4, -2, 1), u_3 = (0, -1, 3, 1), u_4 = (1, 1, 1, 1)$.

Zadanie 3 Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni generowanej przez wektory:

- a) $v_1 = (-5, 2, -3), v_2 = (2, -3, 4), v_3 = (-11, 0, -1)$;
- b) $v_1 = (-1, 2, 1, -4), v_2 = (2, -7, -2, 5), v_3 = (-3, 9, 3, -9)$;
- c) $v_1 = (-1, -1, 1), v_2 = (-2, 10, 6), v_3 = (2, -1, -3), v_4 = (1, 1, 1)$;
- d) $v_1 = (3, 2, -1, 1), v_2 = (2, -2, 2, 5), v_3 = (1, 1, -1, -1), v_4 = (2, -1, 0, 1)$.

Zadanie 4 Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni z zadania 1 oraz podprzestrzeni:

- a) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \quad 2x_2 - x_4 = 0; \quad 3x_1 - 3x_3 = 0\}$;
- b) $V = \{(2a + c, c - 3b, a + 2b, 2c - b + a) \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$;
- c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2^{2x+y-z} = 1\}$;
- d) $Z = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = y - z = z - t\}$.

Zadanie 5 Znaleźć współrzędne wektora $w = (1, 3, -2)$ w bazie:

- a) $v_1 = (1, -1, 2), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, -1, -2);$
- b) $v_1 = (2, -1, -1), v_2 = (-1, 4, -3), v_3 = (-3, 2, 0);$
- c) $v_1 = (-3, -2, -1), v_2 = (1, 2, 4), v_3 = (-1, 3, 1).$

Zadanie 6 Niech $B = (v_1, v_2, v_3)$ będzie bazą w $\mathbb{R}^3$. Czy wektory u_1, u_2, u_3 można przyjąć za bazę $\mathbb{R}^3$, jeśli wiadomo, że:

- a) $u_1 = [2, -1, 0]_B, u_2 = [-1, 2, -1]_B, u_3 = [1, -1, -1]_B;$
- b) $u_1 = [2, 1, 3]_B, u_2 = [1, 1, 1]_B, u_3 = [-2, -2, 3]_B;$
- c) $u_1 = [0, -5, 1]_B, u_2 = [1, -3, 1]_B, u_3 = [3, 2, 1]_B;$
- d) $u_1 = [1, -1, 2]_B, u_2 = [3, -1, 3]_B, u_3 = [-3, -1, 0]_B.$

Jeżeli tak, to wyznaczyć współrzędne wektora $w = [1, 2, 1]_B$ w tej bazie.

Zadanie 7 Znaleźć taką bazę przestrzeni $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = t, x - 3y + 2z = 0\}$, żeby wektor $(1, 1, 1, 1) \in V$ miał w tej bazie współrzędne $[2, 2]$.

Zadanie 8 Sprawdzić, czy poniższy zbiór wektorów

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

jest podprzestrzenią wektorową w $\mathbb{R}^5$. Jeśli tak, to znaleźć jej bazę i wymiar.

Zadanie 9 Wykazać, że wektory $v_1 = (-1, 2, 3, 0), v_2 = (0, -4, 5, 2), v_3 = (-3, -3, 1, 1), v_4 = (2, 0, 1, -1)$ stanowią bazę B przestrzeni $\mathbb{R}^4$, a następnie wyznaczyć współrzędne wektora $w = (-2, -5, 10, 2)$ względem tej bazy.