1. Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ nazywamy wartością własną endomorfizmu $f\colon V \to V$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists v \in V \setminus \{\overline{0}\}\colon\ f(v) = \lambda v.$$

Wektor v jest wówczas nazywany wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ. Przez $\Lambda(f)$ oznaczamy zbiór wartości własnych, tzw. widmo (spektrum) endomorfizmu f.

2. Niech $A \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ spełniający równanie $\det(A - \lambda I) = \overline{0}$ nazywamy wartością własną macierzy A. Niezerowy wektor $v \in \mathbb{K}^n$ spełniający warunek $(A - \lambda I)v = \overline{0}$ nazywamy wektorem własnym macierzy A.

3. Aby znaleźć wartości własne dla danego endomorfizmu f najpierw wyznaczamy macierz odwzorowania f w dowolnie wybranej bazie B (np. w bazie kanonicznej). Oznaczmy ją przez A. Następnie tworzymy wielomian charakterystyczny $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ i obliczamy jego pierwiastki w ciele $\mathbb{K}$.

4. Dla każdej wartości własnej zbiór $V_\lambda = \{v \in V\colon\ f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_V)$ jest podprzestrzenią V. V_λ nazywamy podprzestrzenią własną odpowiadającą wartości własnej λ. Ponadto $1 \leqslant \dim V_\lambda \leqslant k$.

5. Endomorfizm f jest diagonalizowalny wtw, gdy istnieje baza B_λ, w której macierz tego endomorfizmu jest macierzą diagonalną. Jeżeli $\Lambda(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ oraz dla $i = 1, \ldots, s$ krotność λ_i wynosi k_i (tzn. $\chi(\lambda) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda_i - \lambda)^{k_i}$), to warunkiem koniecznym i wystarczającym diagonalizowalności endomorfizmu jest:

   a) $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = \dim V$;
   b) $\forall i \in \{1, \ldots, s\}\ k_i = \dim V_{\lambda_i}$.

   Wówczas w bazie $B_\lambda = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ złożonej z wektorów własnych macierz endomorfizmu f ma postać diagonalną $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_s \end{bmatrix}$, która na przekątnej ma wartości własne ułożone według kolejności wektorów własnych w bazie B_λ, przy czym λ_i występuje na przekątnej macierzy D dokładnie k_i razy.
   Ponadto jeżeli $P = P_{B\to B_\lambda}$ będzie macierzą przejścia z bazy B do bazy B_λ, to prawdziwe są wzory $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$, $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ oraz $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$.

6. Macierz $A \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ jest diagonalizowalna wtw, gdy

$$\exists D \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ diagonalna oraz } \exists P \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ nieosobliwa takie, że } D = P^{-1} \cdot A \cdot P,$$

tzn. A jest podobna do pewnej macierzy diagonalnej D.

Zadanie 1. Wyznacz wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne podanych endomorfizmów. Jeżeli dany endomorfizm jest diagonalizowalny, to podaj macierz diagonalną D oraz macierze nieosobliwe P i P^{-1} takie, że $D = P^{-1}AP$.

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (5x + 6y - 3z, z - x, x + 2y + z)$;

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (4x + y, x + 2y + z, 2x + 4y + 2z)$;

c) $f\colon\ \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, $(f(p))(x) = 2xp'(x) + x^2p(0) + p(2)$;

d) $f\colon\ \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$, $(f(p))(x) = xp'(x + 1) - p(x + 1)$.

Zadanie 2. Wyznacz wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy. Jeżeli dana macierz jest diagonalizowalna, to podaj macierz diagonalną D oraz macierze nieosobliwe P i P^{-1} takie, że $D = P^{-1}AP$.

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},\quad b)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad c)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & i \\ -1 & 1 & 1 \\ -i & -1 & 1 \end{bmatrix}\quad d)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ oblicz $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ oraz $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, gdzie λ_1, λ_2, λ_3 to wartości własne macierzy A, bez ich wyznaczania.

Zadanie 4. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f\colon\ \mathbb{C}^4(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^4(\mathbb{C})$ w bazie kanonicznej. Wykaż, nie wyznaczając wartości własnych tego endomorfizu, że spełniają one warunek $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$.

Zadanie 5. Wyznacz wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne endomorfizmu $f\colon\ \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, danego wzorem

$$f\left(ax^2 + bx + c\right) = (a - 2b - 2c)x^2 + (3c + 2b - 3a)x + (c + 2b - 2a).$$

Zbadaj, czy f jest endomorfizmem diagonalizowalnym. Jeżeli tak, to podaj macierz diagonalną D oraz macierz nieosobliwą P takie, że $A = PDP^{-1}$.

Zadanie 6. Niech $B = (e_1, e_2, e_3)$ będzie bazą przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{C}$. Wyznacz wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne endomorfizmu $f\colon\ V \to V$ wiedząc, że $f(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3$, $f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ oraz $f(e_3) = e_1 + e_2$. Jeżeli jest diagonalizowalny, to podaj macierz diagonalną D oraz macierze nieosobliwe P i P^{-1} takie, że $D = P^{-1}AP$.

Zadanie 7. Znajdź wartości własne, wektory własne oraz podprzestrzenie własne endomorfizmu $f\colon \mathbf{M}_{2\times 2} \to \mathbf{M}_{2\times 2}$ danego wzorem

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + b + c - d & a + b - c + d \\ -a - b + c - d & a + b - d \end{bmatrix}.$$

Wyznacz <u>dwoma</u> sposobami macierz tego endomorfizmu.