

Zadanie 1. Wyznacz wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne podanych endomorfizmów. Jeżeli dany endomorfizm jest diagonalizowalny, to podaj macierz diagonalną D oraz macierze nieosobliwe P i P^{-1} takie, że $D = P^{-1}AP$.

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + 4y, 5x + 3y)$;
 b) $f: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$, $(f(p))(x) = x^3 p'(1) + p(2x)$;
 c) $f: \mathbf{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbf{M}_{2 \times 2}$, $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b & -4c \\ -b & 2d-a \end{bmatrix}$.

Zadanie 2. Wyznacz wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy. Jeżeli dana macierz jest diagonalizowalna, to podaj macierz diagonalną D oraz macierze nieosobliwe P i P^{-1} takie, że $D = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \text{b)} \quad & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, & \text{c)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1 & 1-i \\ -1+i & -1+i & -1+2i \end{bmatrix}, \\ \text{d)} \quad & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & \text{e)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 & i & 0 \\ 1 & 1-2i & 1 & 0 \\ i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}, & \text{f)} \quad & \begin{bmatrix} 1-i & i & i & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Udowodnij następujące twierdzenia:

- a) endomorfizm $f: V \rightarrow V$ jest izomorfizmem $\iff$ wszystkie jego wartości własne są różne od zera;
 b) jeżeli λ jest wartością własną f , to $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ jest wartością własną endomorfizmu $a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0 \text{id}$;
 c) jeżeli $g: V \rightarrow V$ oraz $\dim V < \infty$, to zachodzi równość $\text{tr}(f \circ g) = \text{tr}(g \circ f)$.

Zadanie 4. Wiedząc, że $\Delta_A(\lambda) = -\lambda^5 + \frac{2}{9}\lambda^4 + 2\lambda^3 - \frac{4}{9}\lambda^2 - \lambda + \frac{2}{9}$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A , wyznacz:

- a) wymiar macierzy A , b) $\det(A)$, c) $\text{tr}(A)$.

Zadanie 5. Zbadaj diagonalizowalność endomorfizmu $f: \mathbf{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbf{M}_{2 \times 2}$ określonego za pomocą wzoru $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b+c-2d & a+d \\ 3a-3b+c+3d & 3a-4b+c+5d \end{bmatrix}$. W przypadku, gdy f jest diagonalizowalny podaj macierz diagonalną D oraz nieosobliwą P takie, że $A = PDP^{-1}$.

Zadanie 6. Znajdź wartości własne, wektory własne oraz podprzestrzenie własne endomorfizmu $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ danego wzorem $f(x, y, z, t) = (3x + 3y + z - t, x + y - z + t, -3x - 3y + z - t, x + y + z + 3t)$. Wyznacz dwoma sposobami macierz tego endomorfizmu.