Algebra – zestaw nr 5

Zadanie 1 Sprawdzić czy podane odwzorowania są liniowe:

a) $f_1\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_1(x, y, z) = (z - x, x + y, y - z);$

b) $f_2\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_2(x, y, z) = (y - x + z, 3x - y - z, 2z + 3x);$

c) $f_3\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f_3(x, y, z) = (x - y - 2, 2 + y - z, z + y, x - 2y);$

d) $f_4\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_4(x, y) = (x^2 + y^2, -2xy);$

e) $f_5\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_5(x, y) = (x - y, 2 - x + y, 2x - y^2);$

f) $f_6\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_6(x, y, z, t) = (x + y, x + z, x + t);$

g) $f_7\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f_7(x, y, z, t) = (2x + y, 2z + 2t, x - y + 2z + t, y - x + t);$

h) $f_8\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_8(x, y, z, t) = (x - y + 2z, 4x - y + 3z - t).$

Dla tych odwzorowań, które są liniowe, wyznaczyć Ker f, Im f, ich bazy i wymiary oraz macierze tych odwzorowań. Sprawdzić, czy f jest mono-, epi- lub izomorfizmem.

Zadanie 2 Znaleźć odwzorowania liniowe jeżeli:

a) $f_1\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ponadto wiadomo, że $f(1, 1, 1) = (1, -2)$, $f(1, 2, 0) = (3, -4)$, $f(0, 1, 0) = (1, -3)$;

b) $f_2\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ponadto wiadomo, że $f(0, 3, 1) = (-1, 4, -2)$, $f(1, 0, 0) = (1, 0, -2)$, $f(1, 1, 0) = (0, 1, -3)$;

c) $f_3\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ponadto wiadomo, że $f(1, -2, 1) = (5, -1, 2, 3)$, $f(0, 1, -1) = (-2, 0, -2, -2)$, $f(2, 2, -1) = (-2, 1, 1, -6)$.

Zadanie 3 Skonstruować odwzorowanie liniowe f wiedząc, że:

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, Ker $f = \{(x, y, z) :\ x + y + z = 0\}$, Im $f = \{(x, y) :\ x + 3y = 0\}$;

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, Ker $f = \operatorname{lin}\{(1, 1, 2), (1, -1, 0)\}$, Im $f = \{(x, y) :\ 2x = 3y\}$;

c) $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, Ker $f = \{(x, -x, z, -z)\ x, z \in \mathbb{R}\}$, Im $f = \{(s + t, s - t)\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Zadanie 4 Znaleźć odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jeżeli Ker $f = \{(0, 0, z, t)\ z, t \in \mathbb{R}\}$ oraz $f(1, 1, 1, 1) = (1, 3, 3)$, $f(1, 0, 1, 0) = (1, 1, -3)$.