

Funkcje uwikłane.

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Zbadaj czy krzywa zadana równaniem $F(x, y) = 0$ jest wykresem funkcji uwikłanej w otoczeniu punktu P :
 - (a) $F(x, y) = x - \sin y$, $P(1, \frac{\pi}{2})$
 - (b) $F(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$, $P(0, 0)$
 - (c) $F(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y - 3$, $P(1, 1)$
 - (d) $F(x, y) = x^y - y^x$, $P(e, e)$.
2. Znajdź $f'(x)$ i $f''(x)$ dla funkcji uwikłanej $y = f(x)$ określonej równaniem:
 - (a) $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$
 - (b) $y - \operatorname{arctg} y - x^3 = 0$
 - (c) $xe^y + ye^x - 2 = 0$ w punkcie $x_0 = 0$.
3. Napisz równanie stycznej do krzywej określonej równaniem $F(x, y) = 0$ w punkcie P :
 - (a) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $P(1, 1)$
 - (b) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + x = 0$, $P(1, 1)$
 - (c) $F(x, y) = xe^y + ye^x - 2 = 0$, $P(0, 2)$.
4. Znajdź ekstrema funkcji uwikłanej określonej równaniem:
 - (a) $xy - \ln x = a$
 - (b) $x^3 + y^3 - 9xy = 0$
 - (c) $y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
 - (d) $x^4 - 2x^2 = y^3 - 2y$
 - (e) $x^4 + y^2 - 2xy = 0$
 - (f) $xy^2 - x^2y = 2$.

5. Znajdź równanie płaszczyzn stycznych do powierzchni:

(a) $xy^2 + z^3 = 12$ w punkcie $P(1, 2, 2)$

(b) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 - y^2 - z^2$ w punkcie $P(x_0, y_0, z_0)$.

6. Znajdź równanie prostej normalnej do powierzchni:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ w punkcie $P(3, 4, 12)$

(b) $z = y + \ln \frac{x}{z}$ w punkcie $P(1, 1, 1)$.