

Algebra – zestaw nr 5**Zadanie 1** Sprawdzić czy podane odwzorowania są liniowe:

- a) $f_1: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f_1(x, y, z) = (z - x, x + y, y - z)$;
- b) $f_2: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f_2(x, y, z) = (y - x + z, 3x - y - z, 2z + 3x)$;
- c) $f_3: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $f_3(x, y, z) = (x - y - 2, 2 + y - z, z + y, x - 2y)$;
- d) $f_4: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f_4(x, y) = (x^2 + y^2, -2xy)$;
- e) $f_7: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $f_7(x, y, z, t) = (2x + y, 2z + 2t, x - y + 2z + t, y - x + t)$;
- f) $f_8: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f_8(x, y, z, t) = (x - y + 2z, 4x - y + 3z - t)$.

Dla tych odwzorowań, które są liniowe, wyznaczyć $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$, ich bazy i wymiary oraz macierze tych odwzorowań. Sprawdzić, czy f jest mono-, epi- lub izomorfizmem.

Zadanie 2 Wyznaczyć $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$, ich bazy i wymiary jeżeli wiadomo, że:

- a) $f_1: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ oraz $f(1, 1, 1) = (1, -2)$, $f(1, 2, 0) = (3, -4)$, $f(0, 1, 0) = (1, -3)$;
- b) $f_2: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ oraz $f(0, 3, 1) = (-1, 4, -2)$, $f(1, 0, 0) = (1, 0, -2)$, $f(1, 1, 0) = (0, 1, -3)$;
- c) $f_3: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ oraz $f(1, -2, 1) = (5, -1, 2, 3)$, $f(0, 1, -1) = (-2, 0, -2, -2)$, $f(2, 2, -1) = (-2, 1, 1, -6)$.

Zadanie 3 Skonstruować odwzorowanie liniowe f wiedząc, że:

- a) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{Ker } f = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$, $\text{Im } f = \{(x, y) : x + 3y = 0\}$;
- b) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{Ker } f = \text{lin}\{(1, 1, 2), (1, -1, 0)\}$, $\text{Im } f = \{(x, y) : 2x = 3y\}$;
- c) $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{Ker } f = \{(x, -x, z, -z) : x, z \in \mathbb{R}\}$, $\text{Im } f = \{(s + t, s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Zadanie 4 Znaleźć odwzorowanie liniowe $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jeżeli $\text{Ker } f = \{(0, 0, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\}$ oraz $f(1, 1, 1, 1) = (1, 3, 3)$, $f(1, 0, 1, 0) = (1, 1, -3)$.**Zadanie 5** Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ odwzorowania $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ w bazach

$B_1 = ((1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 1, 0))$, $B_2 = ((0, 2, 0), (1, 2, 0), (0, 0, 2))$. Znaleźć $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$, ich bazy i wymiary. Ponadto obliczyć $f(0, -1, -5)$.