

Zadanie 1. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f: \mathbf{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbf{M}_{2 \times 2}$

w bazie kanonicznej B_k . Zbadaj, czy f jest diagonalizowalny, a jeżeli tak, to podaj macierz diagonalną D oraz macierz nieosobliwą P takie, że $A = PDP^{-1}$. Korzystając z macierzy D oblicz $f^{99} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$.

Zadanie 2. Wyznacz wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne endomorfizmu $f: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$, danego wzorem:

$$f(ax^2 + bx + c) = (a - 2b - 2c)x^2 + (3c + 2b - 3a)x + (c + 2b - 2a).$$

Zbadaj, czy f jest endomorfizmem diagonalizowalnym. Jeżeli tak, to podaj macierz diagonalną D oraz macierz nieosobliwą P takie, że $A = PDP^{-1}$. Wyznacz $f^{2025}(2x^2 + x + 1)$.

Zadanie 3. Przekształcenie liniowe $f: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ spełnia następujące warunki:

$$(f(x+1))(x) = x+1, \quad (f(x^2+x))(x) = \bar{0}, \quad (f(x^2))(x) = -x^2.$$

Oblicz $(f(p))(x)$ dla $p \in \mathbb{R}[x]_2$ oraz $(f^{107}(2x^2 + 3x + 6))(x)$.

Zadanie 4. Niech $A = \begin{bmatrix} p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$. Po-

daj dla jakich wartości parametru p endomorfizm f jest diagonalizowalny. W jednym z tych przypadków podaj bazę, w której macierz endomorfizmu f ma postać diagonalną D oraz nieosobliwą macierz P taką, że $D = P^{-1}AP$.

Zadanie 5. Zbadaj w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$ diagonalizowalność endomorfizmu $f: \mathbf{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbf{M}_{2 \times 2}$ danego wzorem:

$$f \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} b+c+pd & -pa+b+c \\ pa-b-c & -b-c-pd \end{bmatrix}.$$

Dla tych wartości p , dla których endomorfizm f jest diagonalizowalny wyznacz macierz diagonalną D oraz nieosobliwą P takie, że $A = PDP^{-1}$.

Zadanie 6. Niech $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem określonym wzorem

$$f(x, y, z) = (x + y + az, z - y, 2z - 2y).$$

Zbadaj diagonalizowalność endomorfizmu f w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$. Dla tych wartości a , dla których f jest diagonalizowalny wyznacz macierz diagonalną D oraz nieosobliwą P takie, że $M_f = PDP^{-1}$.