Zadanie 1. Wyznacz wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne endomorfizmu $f\colon\ \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ danego wzorem:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & a+b+c \\ \text{-}c & a+c+d \end{bmatrix}.$$

Jeżeli jest diagonalizowalny, to podaj macierz diagonalną D oraz macierze nieosobliwe P i P^{-1} takie, że $D = P^{-1}AP$.

Zadanie 2. Pewne odwzorowanie liniowe $f\colon\ \mathbb{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$ spełnia warunki $f(-1+2i) = 3-6i$ i $f(1+i) = 2+2i$. Oblicz $f^{50}(v)$ dla $v = 3+i$.

Zadanie 3. Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wiedząc, że:

$$f(1,1,-1) = (-1,-1,1), \qquad f(0,2,-3) = (0,-4,6), \qquad f(1,0,0) = (-4,3,-6)$$

wyznacz $f(x,y,z)$ dla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, to podaj bazę, w której macierz odwzorowania f ma postać diagonalną.

Zadanie 4. Niech $M_f(B_k) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ w bazie kanonicznej. Sprawdź, czy f jest diagonalizowalny. Jeśli tak, to znajdź macierz diagonalną D i nieosobliwą P takie, że $D = P^{-1}AP$. Ponadto wyznacz $f^{100}\left(x^2+x+1\right)$.

Zadanie 5. Niech $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie endomorfizmem takim, że

$$f(x,y,z,t) = (x, x-y+t, -x-z+t, t).$$

Zbadaj, czy endomorfizm f jest diagonalizowalny. Jeżeli tak, to wyznacz bazę B, w której macierz odwzorowania f ma postać diagonalną D oraz znajdź macierz D i nieosobliwą macierz P takie, że $D = P^{-1}AP$. Korzystając z macierzy D oblicz $f^{2025}(1,1,-1,-1)$.

Zadanie 6. Dla jakich wartości parametru k endomorfizm $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dany wzorem:

$$f(x,y,z) = (-5kx - 3kz, kx + k^2y - kz, 3kx + kz)$$

jest diagonalizowalny? Dla tych wartości parametru k, dla których f jest diagonalizowalny, wyznacz macierz diagonalną D oraz nieosobliwą P takie, że $D = P^{-1} \cdot M_f \cdot P$.

Zadanie 7. Zbadaj dla jakich wartości parametru p macierz $A = \begin{bmatrix} -2p & 0 & 3p \\ 1 & p^2 & -2 \\ -3p & 0 & 4p \end{bmatrix}$ jest diagonalizowalna. Dla wyznaczonych p znajdź macierz diagonalną D oraz nieosobliwą P takie, że $A = PDP^{-1}$.