Algebra – zestaw nr 6

Zadanie 1 Znaleźć macierze odwzorowań liniowych w podanych bazach:

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (y-x, x+z, y-z)$, $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,3,3)\}$,

b) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z,t) = (2y+x-t, x+z+t, y-z+2t)$, $B_1 = \{(1,0,0,-1),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,-1,0)\}$, $B_2 = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$.

Zadanie 2 Znaleźć macierz przejścia z bazy B_1 do B_2:

a) $B_1 = ((1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,1))$ oraz $B_2 = ((2,1,-4),(1,-2,4),(-1,3,-3))$;

b) $B_1 = ((1,-1,2),(1,1,2),(1,-1,-2))$ oraz $B_2 = ((-3,-2,-1),(1,2,4),(-1,3,1))$;

c) $B_1 = ((1,2,-1),(0,1,-1),(-2,-3,2))$ oraz $B_2 = ((4,8,-5),(-1,2,-1),(-4,-5,3))$;

d) $B_1 = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ oraz $B_2 = ((2,-1,-1,0),(1,-1,4,-3),(2,-3,2,0),(2,1,2,3))$;

e) $B_1 = ((1,0,1,0),(2,-1,0,3),(-1,4,0,1),(1,1,-1,0))$ oraz $B_2 = ((-3,-2,-1,0),(1,1,2,4),(0,-1,3,1),(-1,1,0,2))$;

f) $B_1 = ((1,-1,0,2),(0,1,2,1),(-1,1,1,-1),(2,0,1,0))$ oraz $B_2 = ((3,-2,-1,1),(0,1,-1,-5),(0,2,2,-3),(-5,4,3,-3))$;

Zadanie 3 Niech $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą przejścia od bazy B_1 do <u>danej</u> bazy $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$. Podać wektory bazy B_1 oraz korzystając z macierzy P znaleźć współrzędne wektora $w = [-2,3,1]_{B_1}$ względem bazy B_2.

Zadanie 4 Macierzą endomorfizmu f w bazie kanonicznej $B_k = \{e_1, e_2, e_3\}$ jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokazać, że wektory $l_1 = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $l_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $l_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i znaleźć macierz f w tej bazie.

Zadanie 5 Pewne odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ma w bazach $B_1 = ((2,1),(3,1))$ oraz $B_2 = ((1,1),(0,1))$ macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Znaleźć jego macierz w bazach $B_1' = ((1,1),(3,2))$ oraz $B_2' = ((2,1),(1,0))$.

Zadanie 6 Macierz $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania liniowego $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w bazie $B = (v_1, v_2)$. Znaleźć macierz A' odwzorowania f w bazie $B_1 = (3v_1+v_2, -5v_1-2v_2)$. Dwoma sposobami (korzystając z macierzy A i A') znaleźć $f^{-1}(2v_1 + 5v_2)$.

Zadanie 7 Pewne odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ma w bazach $B_1 = (u_1, u_2)$ oraz $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$ macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz A' odwzorowania f w bazach $B_1' = (u_1 - u_2, 2u_1 - 3u_2)$ oraz $B_2' = (v_1 + v_2 - 2v_3, 2v_2 + v_3, v_1 + 2v_2 - v_3)$. Dwoma sposobami (korzystając z macierzy A i A') znaleźć $f(u_1 + 2u_2)$.

Zadanie 8 Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazach $B_1 = (v_1, v_2, v_3)$, $B_2 = (u_1, u_2, u_3)$, natomiast $C = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazach $B_3 = (-v_1 + v_2, -2v_1 + 3v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3)$, $B_4 = (2u_1+2u_2+u_3, u_2-u_3, 3u_1+3u_2+u_3)$. Wyznaczyć jedną z macierzy: $M_{f\circ g^{-1}}(B_4, B_4)$ lub $M_{g\circ f^{-1}}(B_2, B_2)$ oraz korzystając z wyznaczonej macierzy zapisać macierzowo odwzorowanie dla wybranego przypadku.

Zadanie 9 Niech $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$, a $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ odwzorowaniem liniowym takim, że $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = -v_2$, $f(v_3) = v_2 - v_3$.

a) Podać macierz $M_f(B)$ i sprawdzić, czy f jest izomorfizmem.

b) Podać rząd odwzorowania f.

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą przejścia z bazy B do bazy kanonicznej K. Znaleźć bazę B.

d) Znaleźć macierz $M_f(K)$.

e) Dwoma sposobami, korzystając z macierzy $M_f(B)$ oraz $M_f(K)$ znaleźć $f(2, 2, 3)$.