

**Algebra – zestaw nr 6****Zadanie 1** Znaleźć macierze odwzorowań liniowych w podanych bazach:

- a)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = (y - x, x + z, y - z)$ ,  $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 3, 3)\}$ ,  
 b)  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z, t) = (2y + x - t, x + z + t, y - z + 2t)$ ,  $B_1 = \{(1, 0, 0, -1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0)\}$ ,  $B_2 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ .

**Zadanie 2** Znaleźć macierz przejścia z bazy  $B_1$  do  $B_2$ :

- a)  $B_1 = ((1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1))$  oraz  $B_2 = ((2, 1, -4), (1, -2, 4), (-1, 3, -3))$ ;  
 b)  $B_1 = ((1, -1, 2), (1, 1, 2), (1, -1, -2))$  oraz  $B_2 = ((-3, -2, -1), (1, 2, 4), (-1, 3, 1))$ ;  
 c)  $B_1 = ((1, 2, -1), (0, 1, -1), (-2, -3, 2))$  oraz  $B_2 = ((4, 8, -5), (-1, 2, -1), (-4, -5, 3))$ ;  
 d)  $B_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  oraz  $B_2 = ((2, -1, -1, 0), (1, -1, 4, -3), (2, -3, 2, 0), (2, 1, 2, 3))$ ;  
 e)  $B_1 = ((1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 3), (-1, 4, 0, 1), (1, 1, -1, 0))$  oraz  $B_2 = ((-3, -2, -1, 0), (1, 1, 2, 4), (0, -1, 3, 1), (-1, 1, 0, 2))$ ;  
 f)  $B_1 = ((1, -1, 0, 2), (0, 1, 2, 1), (-1, 1, 1, -1), (2, 0, 1, 0))$  oraz  $B_2 = ((3, -2, -1, 1), (0, 1, -1, -5), (0, 2, 2, -3), (-5, 4, 3, -3))$ ;

**Zadanie 3** Dana jest macierz przejścia  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  od bazy  $B_1$  do  $B_2 = ((1, 2, -1), (-1, 1, -2), (1, -1, 1))$ . Znaleźć wektory bazy  $B_1$ .

**Zadanie 4** Niech  $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  będzie macierzą przejścia od bazy  $B_1$  do  $B_2$

w pewnej przestrzeni  $U$ . Wektor  $u$  ma w bazie  $B_1$  współrzędne  $[2, -1, 1, 2]_{B_1}$ . Znaleźć współrzędne tego wektora w bazie  $B_2$ .

**Zadanie 5** Pewne odwzorowanie liniowe  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ma w bazach  $B_1 = ((2, 1), (3, 1))$  oraz  $B_2 = ((1, 1), (0, 1))$  macierz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ . Znaleźć jego macierz w bazach  $B'_1 = ((1, 1), (3, 2))$  oraz  $B'_2 = ((2, 1), (1, 0))$ .

**Zadanie 6** Macierz  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  jest macierzą odwzorowania liniowego  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  w bazie  $B = (v_1, v_2)$ . Znaleźć macierz  $A'$  odwzorowania  $f$  w bazie  $B_1 = (3v_1 + v_2, -5v_1 - 2v_2)$ . Dwoma sposobami (korzystając z macierzy  $A$  i  $A'$ ) znaleźć  $f^{-1}(2v_1 + 5v_2)$ .

**Zadanie 7** Pewne odwzorowanie liniowe  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ma w bazach  $B_1 = (u_1, u_2)$  oraz  $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$  macierz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Znaleźć macierz  $A'$  odwzorowania  $f$  w bazach  $B'_1 = (u_1 - u_2, 2u_1 - 3u_2)$  oraz  $B'_2 = (v_1 + v_2 - 2v_3, 2v_2 + v_3, v_1 + 2v_2 - v_3)$ . Dwoma sposobami (korzystając z macierzy  $A$  i  $A'$ ) znaleźć  $f(u_1 + 2u_2)$ .

**Zadanie 8** Niech  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  będzie macierzą przejścia od bazy  $B_1$  do danej bazy  $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$ . Podać wektory bazy  $B_1$  oraz korzystając z macierzy  $P$  znaleźć współrzędne wektora  $w = [-2, 3, 1]_{B_1}$  względem bazy  $B_2$ .

**Zadanie 9** Niech  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  będzie macierzą odwzorowania  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  w bazach  $B_1 = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $B_2 = (u_1, u_2, u_3)$ , natomiast  $C = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$  będzie macierzą odwzorowania  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  w bazach  $B_3 = (-v_1 + v_2, -2v_1 + 3v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3)$ ,  $B_4 = (2u_1 + 2u_2 + u_3, u_2 - u_3, 3u_1 + 3u_2 + u_3)$ . Wyznaczyć jedną z macierzy:  $M_{f \circ g^{-1}}(B_4, B_4)$  lub  $M_{g \circ f^{-1}}(B_2, B_2)$  oraz korzystając z wyznaczonej macierzy zapisać macierzowo odwzorowanie dla wybranego przypadku.

**Zadanie 10** Niech  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  będzie bazą przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , a  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  odwzorowaniem liniowym takim, że  $f(v_1) = 2v_1$ ,  $f(v_2) = -v_2$ ,  $f(v_3) = v_2 - v_3$ .

a) Podać macierz  $M_f(B)$  i sprawdzić, czy  $f$  jest izomorfizmem.

b) Podać rząd odwzorowania  $f$ .

c)  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  jest macierzą przejścia z bazy  $B$  do bazy kanonicznej  $K$ .  
Znaleźć bazę  $B$ .

d) Znaleźć macierz  $M_f(K)$ .

e) Dwoma sposobami, korzystając z macierzy  $M_f(B)$  oraz  $M_f(K)$  znaleźć  $f(2, 2, 3)$ .