

Zadanie 1. Niech $A = \begin{bmatrix} -p & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$

w bazie kanonicznej B_k . Zbadaj diagonalizowalność endomorfizmu f w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$. W jednym z przypadków, gdy f jest diagonalizowalny podaj macierz diagonalną D oraz nieosobliwą P takie, że $D = P^{-1}AP$.

Zadanie 2. Zbadaj diagonalizowalność endomorfizmu $f: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$, danego wzorem $f(ax^2 + bx + c) = (2pa - 2b + pc)x^2 + (-a + 3pb - c)x + (pa - 2b + 2pc)$, w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$. W jednym z tych przypadków, gdy f jest diagonalizowalny, podaj macierz diagonalną D oraz macierz nieosobliwą P takie, że $A = PDP^{-1}$.

Zadanie 3. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & -1 \end{bmatrix}$.

- a) Zbadaj diagonalizowalność macierzy A .
- b) Podaj macierz diagonalną D oraz nieosobliwą P taką, że $D = P^{-1}AP$.
- c) Oblicz P^{-1} oraz wykorzystaj macierze P^{-1} , P , D do wyznaczenia A^4 .

Zadanie 4. Niech $A = M_f(B_k)$ będzie macierzą endomorfizmu $f: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ w bazie kanonicznej $B_k = (x^2, x, 1)$.

- a) Wyznacz macierz A wiedząc, że $(f(x^2))(x) = -x^2 + 3x - 3$, $(f(x))(x) = 2x$ oraz $(f(x^2 + x + 1))(x) = -4x^2 + 8x - 4$.
- b) Wyznacz bazę B , w której macierz D endomorfizmu f ma postać diagonalną oraz podaj macierz D .
- c) Wykorzystując macierz D oblicz $f^5(2x^2 - x)$.