Algebra – zestaw nr 7

Zadanie 1 Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne podanych endomorfizmów:

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (4x+2y, y-x)$;

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x+y, 4y-x)$;

c) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x, 2x+2y, -x-y+z)$;

d) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (3x-y, 6x-2y, 2x-y+z)$;

e) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (-x-3z, 3x+2y+3z, -3x-z)$.

Zadanie 2 Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy:

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad b)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},\quad c)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad d)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli dana macierz jest diagonalizowalna, to podać macierz diagonalną D oraz macierze nieosobliwe P i P^{-1} takie, że $D = P^{-1}AP$.

Zadanie 3 Endomorfizm $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ przeprowadza wektory $v_1 = (3,1,0)$, $v_2 = (-1,-1,1)$ oraz $v_3 = (0,-1,2)$ odpowiednio na wektory $(-3,-1,0)$, $(-2,-2,2)$, $(0,-1,2)$. Wyznaczyć $f(x,y,z)$ dla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ oraz $f^{10}(1,1,1)$.

Zadanie 4 Niech $A = \begin{bmatrix} p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Podać dla jakich wartości parametru p endomorfizm f jest diagonalizowalny. W <u>jednym</u> z tych przypadków podać bazę, w której macierz endomorfizmu f ma postać diagonalną D oraz nieosobliwą macierz P taką, że $D = P^{-1}AP$.

Zadanie 5 Dla jakich wartości parametru a endomorfizm $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $f(x,y,z) = (3x, 4x+y+2z, ax+3z)$ jest diagonalizowalny? Podać w takich przypadkach bazę, w której macierz endomorfizmu ma postać diagonalną oraz znaleźć macierz P taką, że $D = P^{-1}AP$, gdzie A jest macierzą endomorfizmu f w bazie kanonicznej. Dla $a = 0$ wyznaczyć $f^n(x,y,z)$.

__**Zadanie 6**__ Pewne odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ spełnia warunki $f(-1,2) = (3,-6)$ i $f(1,1) = (2,2)$. Obliczyć $f^{50}(v)$ dla $v = (3,1)$.

__**Zadanie 7**__ Dany jest endomorfizm $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taki, że $f(0,1,2) = (0,-1,-2)$, $f(1,1,3) = (0,0,0)$, $f(2,1,0) = (2,1,0)$. Znaleźć $f^{100}(x,y,z)$.

__**Zadanie 8**__ Endomorfizm f przestrzeni $\mathbb{R}^3$ spełnia warunki: $f(0,1,1) = (0,1,1)$, $f(2,2,0) = (0,0,0)$, $f(1,0,0) = (-1,0,0)$. Obliczyć $f^{105}(1,4,2)$.