

Całki powierzchniowe nieorientowane

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Oblicz pole płata powierzchniowego:

- (a) wyciętego walcem $x^2 + y^2 = 2x$ z powierzchni $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$
- (b) wyciętego walcem $x^2 + y^2 = R^2$ ze stożka $y^2 + z^2 = x^2$
- (c) wyciętego powierzchnią walcową $x^2 + y^2 = Rx$ z górnej połowy sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$
- (d) paraboloidy $z = x^2 + y^2$ odciętej płaszczyznami $z = 1, z = 4$
- (e) płata S zadanego parametrycznie

$$r : \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u \end{cases},$$

gdzie $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 1]$.

- 2. Oblicz masę płata powierzchniowego $S : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $z \leq 2$ o gęstości $\rho(x, y, z) = 5$.
- 3. Oblicz masę powierzchni paraboloidy o równaniu $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, ograniczonej płaszczyzną $z = 1$, wiedząc, że gęstość w każdym punkcie tej powierzchni jest równa odległości tego punktu od płaszczyzny XY .
- 4. Oblicz masę powierzchni bryły ograniczonej powierzchniami $S_1 : z = 2 - x^2 - y^2$, $S_2 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \leq 1$, wiedząc, że gęstość w każdym punkcie tej powierzchni jest równa kwadratowi odległości tego punktu od osi OZ .
- 5. Oblicz całkę powierzchniową nieorientowaną

$$\int \int_S (x + y + z) dS,$$

gdzie S jest powierzchnią prostopadłościanu $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 2]$, $z \in [0, 3]$.

6. Oblicz $\int \int_S f(x, y, z) dS$, gdzie:

- (a) $f(x, y, z) = z + 2x + \frac{4y}{3}$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ zawartą w pierwszym oktancie
- (b) $f(x, y, z) = x$, gdzie S jest dana równaniem $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = u + v$ dla $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$
- (c) $f(x, y, z) = x - 3z$, gdzie S jest trójkątem o wierzchołkach $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(0, 0, 1)$.