

Algebra – zestaw nr 7

Zadanie 1 Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne podanych endomorfizmów:

- a) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (4x + 2y, y - x)$;
 b) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, 4y - x)$;
 c) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, 2x + 2y, -x - y + z)$;
 d) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (3x - y, 6x - 2y, 2x - y + z)$;
 e) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-x - 3z, 3x + 2y + 3z, -3x - z)$.

Zadanie 2 Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad d) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli dana macierz jest diagonalizowalna, to podać macierz diagonalną D oraz macierze nieosobliwe P i P^{-1} takie, że $D = P^{-1}AP$.

Zadanie 3 Endomorfizm $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ przeprowadza wektory $v_1 = (3, 1, 0)$, $v_2 = (-1, -1, 1)$ oraz $v_3 = (0, -1, 2)$ odpowiednio na wektory $(-3, -1, 0)$, $(-2, -2, 2)$, $(0, -1, 2)$. Wyznaczyć $f(x, y, z)$ dla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ oraz $f^{10}(1, 1, 1)$.

Zadanie 4 Niech $A = \begin{bmatrix} p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Podać

dla jakich wartości parametru p endomorfizm f jest diagonalizowalny. W jednym z tych przypadków podać bazę, w której macierz endomorfizmu f ma postać diagonalną D oraz nieosobliwą macierz P taką, że $D = P^{-1}AP$.

Zadanie 5 Dla jakich wartości parametru a endomorfizm $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdzie $f(x, y, z) = (3x, 4x + y + 2z, ax + 3z)$ jest diagonalizowalny? Podać w takich przypadkach bazę, w której macierz endomorfizmu ma postać diagonalną oraz znaleźć macierz P taką, że $D = P^{-1}AP$, gdzie A jest macierzą endomorfizmu f w bazie kanonicznej. Dla $a = 0$ wyznaczyć $f^n(x, y, z)$.

Zadanie 6 Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & -1 \end{bmatrix}$.

- a) Zbadać diagonalizowalność macierzy A .
- b) Podać macierz diagonalną D oraz nieosobliwą P taką, że $D = P^{-1}AP$.
- c) Obliczyć P^{-1} oraz wykorzystać macierze P^{-1} , P , D do wyznaczenia A^4 .

Zadanie 7 Pewne odwzorowanie liniowe $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ spełnia warunki $f(-1, 2) = (3, -6)$ i $f(1, 1) = (2, 2)$. Obliczyć $f^{50}(v)$ dla $v = (3, 1)$.

Zadanie 8 Endomorfizm f przestrzeni $\mathbb{R}^3$ spełnia warunki: $f(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$, $f(2, 2, 0) = (0, 0, 0)$, $f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$. Obliczyć $f^{105}(1, 4, 2)$.