1) Klatką Jordana odpowiadającą wartości własnej λ nazywamy macierz $J_{\lambda,k} \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$, która na przekątnej głównej ma wartość własną λ, nad przekątną główną znajdują się 1, a na pozostałych pozycjach 0, na przykład dla $k = 4$:

$$J_{\lambda,4} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

2) Macierz kwadratowa $J \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ jest macierzą w postaci Jordana, jeśli

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & J_K \end{bmatrix},$$

gdzie dla $i = 1, \dots, K$ macierz J_i jest klatką Jordana, tzn.

$$\forall i \in \{1, \dots, K\}\ \exists \lambda \in \mathbb{K}\ \exists d_i \in \mathbb{N}: \quad J_i = J_{\lambda,d_i},$$

gdzie $\sum_{i=1}^{K} d_i = n$.

3) Dla dowolnego endomorfizmu $f : V \to V$ istnieje baza przestrzeni V, w której macierz f przyjmuje postać Jordana.
Dowolna macierz kwadratowa jest podobna do macierzy w postaci Jordana.

4) Schemat sprowadzania macierzy endomorfizmu f do postaci Jordana (nieformalnie):

1. Wyznaczamy wielomian charakterystyczny oraz wartości własne.
2. Dla każdej z wartości własnych $\lambda \in \Lambda(f)$ wyznaczamy jej podprzestrzeń własną V_λ.
   $\dim V_\lambda$ to liczba klatek Jordana odpowiadających danej wartości własnej,
3. Dla każdej wartości własnej $\lambda \in \Lambda(f)$ oraz dla każdego wektora własnego v z bazy przestrzeni V_λ wyznaczamy ciąg wektorów głównych odpowiadający wektorowi v, tzn. ciąg w postaci $v, v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ (zgodnie z twierdzeniem o konstrukcji bazy złożonej z wektorów głównych).
   Liczba wektorów głównych odpowiadających danemu wektorowi własnemu to wymiar klatki Jordana odpowiadającej temu wektorowi własnemu.
4. Baza B_J, w której macierz endomorfizmu f ma postać Jordana składa się ze wszystkich powstałych w powyższy sposób ciągów wektorów głównych.
5. Przy konstrukcji macierzy w postaci Jordana należy zwrócić uwagę na to, by kolejność klatek w macierzy była zgodna z kolejnością ciągów wektorów głównych w bazie B_J.

5) Macierz $J = M_f(B_J)$ nazywamy macierzą Jordana endomorfizmu f.

6) Jeśli $A = M_f(B)$ jest macierzą f w dowolnej bazie B, to $J = M_f(B_J)$ jest postacią Jordana macierzy A. W szczególności macierze J i A są podobne: $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$ dla $P = P_{B\to B'}$. Jeżeli macierz A jest diagonalizowalna, to postać Jordana pokrywa się z postacią diagonalną tej macierzy.

Zadanie 1. Wyznacz postać Jordana dla macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Zadanie 2. Niech $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ w bazie kanonicznej. Podaj bazę, w której macierz J odwzorowania f ma postać Jordana. Wypisz macierz J oraz nieosobliwą macierz P taką, że $J = P^{-1}AP$. Czy f jest automorfizmem? Odpowiedź uzasadnij w oparciu o wartości własne f.

Zadanie 3. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ w bazie kanonicznej $(1, x, x^2, x^3)$. Podaj bazę, w której macierz J odwzorowania f ma postać Jordana. Wypisz tę macierz J oraz nieosobliwą macierz P taką, że $J = P^{-1}AP$. Czy f jest automorfizmem?

Zadanie 4. Niech $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ będzie bazą przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{C}$. Odwzorowanie $f\colon V \to V$ ma w bazie B macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wiedząc, że wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda - 3)$, wyznacz bazę B_J złożoną z wektorów głównych, w której macierz odwzorowania f ma postać Jordana. Wypisz tę macierz J oraz nieosobliwą macierz P taką, że $J = P^{-1}AP$.

Zadanie 5. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f\colon V \to V$ w bazie $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Podaj bazę, w której macierz J odwzorowania f ma postać Jordana. Wypisz tę macierz J oraz nieosobliwą macierz P taką, że $PJP^{-1} = A$. Znajdź bazę obrazu endomorfizmu f.

Zadanie 6. Niech $f\colon \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ będzie endomorfizmem takim, że:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2a + b + d & a - 2c - d \\ a + b - 3c - d & -2a - b + 3c + d \end{bmatrix}.$$

Wyznacz macierz A odwzorowania f w bazie kanonicznej

$$B_{\mathcal{Z}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Wiedząc, że wielomian charakterystyczny f ma postać $\chi(\lambda) = (\lambda + 1)^4$, wyznacz bazę w $\mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ złożoną z wektorów głównych, w której macierz odwzorowania f ma postać Jordana. Wypisz tę macierz J oraz nieosobliwą macierz P taką, że $J = P^{-1}AP$. Czy f jest monomorfizmem? Odpowiedź uzasadnij.