Zadanie 1. Wyznacz postać Jordana dla macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ f) $F = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ h) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Wskazówka: $\chi_G(\lambda) = (2-\lambda)^3 \cdot (1-\lambda)^3$ *Wskazówka:* $\chi_H(\lambda) = (2-\lambda)^6$.

Zadanie 2. Niech $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ w bazie kanonicznej. Podaj bazę, w której macierz J odwzorowania f ma postać Jordana. Wypisz tę macierz J oraz nieosobliwą macierz P taką, że $J = P^{-1}AP$.

Zadanie 3. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$, której bazą jest $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Wyznacz bazę w V złożoną z wektorów głównych, w której macierz J odwzorowania f ma postać Jordana, gdzie $f(e_1) = -e_3$, $f(e_2) = -e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4$, $f(e_3) = 2e_1 + 3e_3$, $f(e_4) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 + e_4$. Wypisz tę macierz J oraz podaj przepis odwzorowania f.

Zadanie 4. Niech $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ w bazie kanonicznej. Podaj bazę, w której macierz J odwzorowania f ma postać Jordana. Wypisz tę macierz J oraz nieosobliwą macierz P taką, że $J = P^{-1}AP$. *Wskazówka:* $\chi_f(\lambda) = (2-\lambda)^2 \cdot (3-\lambda)^3$.

Zadanie 5. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ w bazie kanonicznej. Podaj bazę, w której macierz J odwzorowania f ma postać Jordana. Wypisz tę macierz J oraz nieosobliwą macierz P taką, że $PJP^{-1} = A$. Znajdź bazę obrazu endomorfizmu f.

Zadanie 6. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$, której bazą jest $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Wyznacz bazę w V złożoną z wektorów głównych, w której macierz J odwzorowania f ma postać Jordana, gdzie $f(e_1) = -e_1$, $f(e_2) = e_1 - 2e_2 + e_3 - e_4$, $f(e_3) = -e_3$, $f(e_4) = -e_1 + e_2 - e_3$. Wypisz tę macierz J oraz podaj przepis odwzorowania f.